第 5 章

p.162 【練習問題 1】 V, W を実線形空間 $\mathbb{R}^k$ の部分空間とする．ベクトル $v_1, \ldots, v_m \in V$ が線形独立，かつベクトル $w_1, \ldots, w_n$ が線形独立のとき，$V \cap W = \{0\}$ ならば $v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n$ も線形独立となることを示せ．ただし $0 \in \mathbb{R}^k$ は零ベクトルを表すものとする．

(早稲田大基幹理工学研究科 数学応用数理専攻)

【解答】 実数 $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ について $x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m + y_1 w_1 + \cdots + y_n w_n = 0$ だとする．

$$x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = -(y_1 w_1 + \cdots + y_n w_n) \in V \cap W = \{0\}$$

より $x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = y_1 w_1 + \cdots + y_n w_n = 0$． 系 $\{v_1, \ldots, v_m\}$ および $\{w_1, \ldots, w_n\}$ はそれぞれ線形独立だから，$x_1 = \cdots = x_m = 0$，$y_1 = \cdots = y_n = 0$．従って合併 $\{v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n\}$ は線形独立である． □

p.171 【練習問題 2】 V を $\mathbb{C}$ 上の $\{0\}$ でない有限次元ベクトル空間とし，線形変換 $f : V \to V$ が条件

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$$

を満たしているとする．ただし

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V | f(v) = 0\}, \qquad \operatorname{Im} f = \{f(v) \in V | v \in V\}$$

である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ かつ $\operatorname{Im} f \neq V$ を示せ．

(2) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ を $\operatorname{Im} f$ の基底とする． $f(w_i) = v_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ を満たす V のベクトルを $w_1, \ldots, w_n$ をとると，$\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ は 1 次独立であることを示せ．

(3) (2) に於ける $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ は V の基底である事を示せ．

(4) V の基底 $\{v_1, w_1, v_2, w_2, \ldots, v_n, w_n\}$ に関する f の行列表示を求めよ．

(名古屋大多元数理研究科)

【解答】(1) $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ だとすると仮定より $\operatorname{Im} f = \{0\}$，従って $V = \operatorname{Ker} f = \{0\}$ となるが，これは $V \neq \{0\}$ という仮定に反する．故に $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$. また次元定理より $\dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f < \dim V$ だから $\operatorname{Im} f \neq V$ である．

(2) $x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n + y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n = 0$ だとする．$v_i \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ より，これを f に代入すれば

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = f(x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n + y_1 v_1 + \cdots y_n v_n) = 0.$$

$\{v_1, \ldots, v_n\}$ は $\operatorname{Im} f$ の基底だから $x_1 = \cdots = x_n = 0$．さらに $y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n = 0$ となるから $y_1 = \cdots = y_n = 0$．よって $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ は 1 次独立である．

(3) 任意の $v \in V$ をとる．$f(v) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = f(x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n) \ \ (x_i \in \mathbb{R})$ と表される．

$$f(v - (x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n)) = f(v) - f(v) = 0 \qquad \therefore \quad v - (x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n) \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$$

従って $v - (x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n) = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$，$v = x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n + y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$．よって $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ は V を生成し，(2) と合わせれば V の基底となる．

(4) $f(v_i) = 0$ かつ $f(w_i) = v_i$ より $f(v_i, w_i) = (v_i, w_i) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ だから，この基底に関する表現行列 F は $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ の n 個の直和

$$F = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & & & \text{\Large 0} \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

となる．

※ F は第 $2i-1$ 列が零ベクトル，第 $2i$ 列が $\boldsymbol{e}_{2i-1}$ ($\boldsymbol{e}_j$ は第 j 成分が 1，他の成分を 0 とする $2n$ 次元列ベクトルを表す) となる $2n$ 次正方行列：

$$F = [\boldsymbol{o}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{e}_3, \dots, \overset{\overset{2i-1}{\vee}}{\boldsymbol{o}}, \overset{\overset{2i}{\vee}}{\boldsymbol{e}_{2i-1}}, \dots, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{e}_{2n-1}]$$

と考えてもよい． □

p.171 **【練習問題 3】** 写像 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が条件

$$(\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

を全ての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して満たすとする．ここで

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \left(\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right)$$

は $\mathbb{R}^n$ の内積である．

(1) 零ベクトル $\boldsymbol{o}$ に対して $\varphi(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ を示せ．
(2) φ は線形写像となることを示せ．
(3) 直交行列 A が存在して $\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表されることを示せ．

(東京工業大理工学研究科 数学専攻)

【解答】 $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ と置く．

(1) 仮定より $\|\varphi(\boldsymbol{o})\|^2 = \|\boldsymbol{o}\|^2 = 0$． $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ となる $\boldsymbol{x}$ は零ベクトルしかないから $\varphi(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$．
(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$， $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) - \alpha\varphi(\boldsymbol{x}) - \beta\varphi(\boldsymbol{y})\|^2 \\
=&(\varphi(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}), \varphi(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y})) + \alpha^2(\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x})) + \beta^2(\varphi(\boldsymbol{y}), \varphi(\boldsymbol{y})) \\
&- 2\alpha(\varphi(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}), \varphi(\boldsymbol{x})) - 2\beta(\varphi(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}), \varphi(\boldsymbol{y})) + 2\alpha\beta(\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y})) \\
=&\|\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}\|^2 + \alpha^2\|\boldsymbol{x}\|^2 + \beta^2\|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&- 2\alpha(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - 2\beta(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + 2\alpha\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
=&\alpha^2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\alpha\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \beta^2\|\boldsymbol{y}\|^2 + \alpha^2\|\boldsymbol{x}\|^2 + \beta^2\|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&- 2\alpha^2\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\alpha\beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - 2\alpha\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - 2\beta^2\|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\alpha\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
=&0
\end{aligned}$$

よって $\varphi(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi(\boldsymbol{y})$ となるから φ は線形写像である．

(3) $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ を内積に関する正規直交基底とし， $A = [a_{ij}]$ をこの正規直交基底に関する φ の表現行列とする．このとき

$$(\varphi(\boldsymbol{e}_i), \varphi(\boldsymbol{e}_j)) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} a_{ip} a_{jq} (\boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_q) = \sum_{p=1}^{n} a_{pi} a_{pj}$$

と仮定より

$$\sum_{p=1}^{n} a_{pi} a_{pj} = (\varphi(\boldsymbol{e}_i), \varphi(\boldsymbol{e}_j)) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}.$$

一方，(${}^tAA$ の (i,j) 成分) $= \sum_{p=1}^{n} a_{pi} A_{pj}$ だから ${}^tAA = E_n$． 従って A は直交行列となる． □

p.172 **【練習問題 4】** 自然数 n に対して n 次複素正方行列全体を $M = M_n(\mathbb{C})$ とする．また $A \in M$ に対して A の対角成分全体の和を $\mathrm{tr}(A)$ と書くことにする．つまり $A = (a_{ij})$ とするとき $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ と定めるのである．ここで $\mathbb{C}$ は複素数体である．このとき次の各問に答えよ．

(1)　$f : M \to \mathbb{C}$ を各 $A \in M$ に対して $f(A) = \mathrm{tr}(A)$ で定義する．f が $\mathbb{C}$ 上の線形写像であることを証明せよ．

(2)　$\mathrm{tr}(E_{ij}A)$ を求めよ．ここで E_{ij} は (i,j) 成分のみが 1 で他の成分がすべて 0 となっている M の元である．

(3)　(1) で定めた f を考える．$A \in M$ が条件

$$\forall B \in M \quad \text{に対して} \qquad BA \in \mathrm{Ker}(f)$$

を満たしているとする．このとき $A = O$（n 次零行列）となることを証明せよ．

(4)　次の (a) (b) を証明せよ

　(a)　$A, B \in M$ に対して $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ である．

　(b)　$A \in M$ と正則行列 $P \in M$ に対して $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$ である．

(5)　$A \in M$ に対して $\mathrm{tr}(A)$ は A の n 個の固有値すべての和と等しいことを証明せよ．

(千葉大理学研究科 数学・情報数理学コース)

【解答】 (1)　$A, B \in M_n(\mathbb{C})$,　$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し

$$f(\alpha A + \beta B) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \alpha \mathrm{tr}(A) + \beta \mathrm{tr}(B)$$

より f は線形である．

(2)　$E_{ij} = [\delta_{pi}\delta_{jq}]$ となるから，

$$f(E_{ij}A) = \mathrm{tr}[\sum_{q=1}^{n} \delta_{pi}\delta_{qj}a_{qr}] = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \delta_{pi}\delta_{qj}a_{qp} = a_{ji}$$

(3)　(2) と仮定より $a_{ji} = f(E_{ij}A) = 0$　$(1 \leq i, j \leq n)$ だから $A = O$.

(4)(a)　$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対し

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}\left([\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}]\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki},$$
$$\mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}\left([\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}]\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

より $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ である．

(b)　$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(APP^{-1}) = \mathrm{tr}(AE_n) = \mathrm{tr}(A)$.

(5)　J_A を A の Jordan 標準形，P を $P^{-1}AP = J_A$ となる n 次正方行列だとする．J_A の (重複も込めた) 対角成分の全体 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ は固有値の全体と一致するから，(4)(b) と合わせて

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(J_A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

□