

## 第 4 章

p.120 【練習問題 1】 行列  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  を (i)  $\mathbb{R}^2$  上の一次変換, (ii)  $\mathbb{C}^2$  上の一次変換と考えるときの固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

【解答】  $A$  の固有多項式は  $\phi_A(t) = |tE_2 - A| = (t-1)^2 + 2$  である.

(i)  $A$  を  $\mathbb{R}^2$  上の一次変換と考えるとき,  $\phi_A(t) = 0$  となる  $t$  は  $\mathbb{R}$  内に存在せず, 従ってこの場合,  $A$  は固有値, よって固有ベクトルを持たない.

(ii)  $A$  を  $\mathbb{C}^2$  上の一次変換と考えるとき,  $\phi_A(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \pm \sqrt{2}i$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) であり,

$$A - (1 + \sqrt{2}i)E_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}i & 2 \\ -1 & -\sqrt{2}i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A - (1 - \sqrt{2}i)E_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}i & 2 \\ -1 & \sqrt{2}i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より固有値  $1 + \sqrt{2}i$  に対応する固有ベクトルは  $c \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ i \end{bmatrix}$ , 固有値  $1 - \sqrt{2}i$  に対応する固有ベクトルは  $c \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -i \end{bmatrix}$  ( $c$  は 0 以外の複素数) となる. □

p.126 【練習問題 2】 行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  を考える.

- (1) 行列  $A$  の固有値と固有空間を求めよ.
- (2) 行列  $A$  は対角化可能でないことを示せ.

(埼玉大理工学研究科 数理電子情報系専攻・数学コース)

【解答】 (1)  $A$  の固有多項式は

$$\phi_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & 0 \\ -1 & t-3 & 0 \\ -1 & -1 & t-4 \end{vmatrix} = \{(t-3)^2 - (-1)^2\}(t-4) = (t^2 - 6t + 8)(t-4) = (t-2)(t-4)^2.$$

だから 2, 4 (重複度 2) が固有値である.

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - 4E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より固有値 2 に対応する固有ベクトルは  $c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 固有値 4 に対応する固有ベクトルは  $c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ( $c$  は 0 以外の任意定数) である,

(2) 対角化可能ならば固有ベクトルからなる  $\mathbb{R}^3$  の基底が存在する.  $A$  については固有ベクトルが 2 次元分しかないので,  $A$  は対角化できない. □

p.132 【練習問題 3】 Suppose that a set of 3-dimensional real vectors  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  is orthonormal. Answer the following questions. In the questions, vector  $\mathbf{x}$  stands for a column vector, and its trasposition  $\mathbf{x}^\top$  stands for a row vector. Use notation  $\mathbf{x}^\top \mathbf{y}$  to describe “inner product between  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$ ”.

- (1) Let  $\mathbf{a}$  be a 3-dimensional real vector. Find values of coefficients  $\alpha, \beta$  and  $\gamma$  which satisfy  $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} + \gamma \mathbf{w}$ .
- (2) Find all eigenvalues of the matrix  $A = \mathbf{u}\mathbf{u}^\top + 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top$  and their eigenvectors.
- (3) Find the determinant of  $A$ .

(筑波大システム情報工学研究科 コンピュータサイエンス専攻)

【解答】 (1)  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  は正規直交基底だから,

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}^\top \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}^\top \mathbf{u} + \gamma \mathbf{w}^\top \mathbf{u} = \alpha.$$

同様の計算により  $\beta = \mathbf{a}^\top \mathbf{v}$ ,  $\gamma = \mathbf{a}^\top \mathbf{w}$  が確かめられる.

(2)

$$A\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{u}^\top\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top\mathbf{u} = \mathbf{u},$$

$$A\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{u}^\top\mathbf{v} + 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top\mathbf{v} = 2\mathbf{v},$$

$$A\mathbf{w} = \mathbf{u}\mathbf{u}^\top\mathbf{w} + 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top\mathbf{w} = 0\mathbf{w}$$

より  $A$  の固有値は  $0, 1, 2$ . 各固有値に対する固有ベクトルはそれぞれ  $c\mathbf{u}$ ,  $c\mathbf{v}$ ,  $c\mathbf{w}$  ( $c$  は  $0$  以外の実数) となる.

(3)  $P = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$  と置けば  $P$  は正則行列 (特に直交行列) であり,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \det A = \det(P^{-1}AP) = 1 \cdot 2 \cdot 0 = 0.$$

□

p.133 【練習問題 4】  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  とする.

(i)  $A$  の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(ii) (i) で求めた固有ベクトルベクトルの組を並べて作った行列を  $P$  とするとき,  $P^{-1}AP$  を計算せよ.

(iii) (i) で求めた固有ベクトルの組を正規直交化せよ.

(iv) (iii) で求めた正規直交化されたベクトルの組を並べて作った行列を  $Q$  とするとき,  $Q$  が直交行列であることを示せ. さらに  $QAQ$  を計算し (ii) の結果と比較せよ.

【解答】 (i)  $A$  の固有多項式を  $\phi_A(t)$  とする.

$$\begin{aligned} \phi_A(t) &= \begin{vmatrix} t+1 & -2 & 1 \\ -2 & t-3 & 3 \\ -2 & -1 & t+1 \end{vmatrix} \stackrel{\textcircled{1}-2 \times \textcircled{3}}{=} \begin{vmatrix} t+5 & 0 & -2t-1 \\ 0 & t-2 & -t+2 \\ -2 & -1 & t+1 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t+5 & 0 & -2t-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & t+1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\textcircled{3}+\textcircled{2}}{=} (t-2) \begin{vmatrix} t+5 & 0 & -2t-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & t \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t+5 & -2t-1 \\ -2 & t \end{vmatrix} = (t-2)(t-1)(t+2) \end{aligned}$$

より  $A$  の固有値は  $1, \pm 2$ . 各固有値に対する特性行列を簡約化すると

$$\begin{aligned} A + 2E_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A - E_3 &= \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A - 2E_3 &= \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/7 \\ 0 & 1 & -11/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

だから, 固有値  $-2, 1, 2$  に対応する固有ベクトルはそれぞれ  $c \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $c \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}$ , ( $c$  は  $0$  以外の実数) となる.

(ii)  $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 11 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$  とすれば  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  となる.

※ (検算用)  $P$  の逆行列は

$$\begin{aligned}
 [P|E_3] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\textcircled{2}+\textcircled{1} \\ \textcircled{3}+\textcircled{1}}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 16 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{\textcircled{1}\times-3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & -15 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 16 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\textcircled{1}+\textcircled{2} \\ \textcircled{2}-\textcircled{2}}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 16 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{\substack{\textcircled{1}\times 4 \\ \textcircled{3}\times(-1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 4 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 16 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\textcircled{1}-\textcircled{3} \\ \textcircled{3}\times-4}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 0 & -8 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{\substack{\textcircled{1}\div 12 \\ \textcircled{2}\div 3 \\ \textcircled{3}\div 4}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 1/4 & 1/12 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 \end{array} \right] \quad \therefore P^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -8 & 3 & 1 \\ 4 & -12 & 16 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -8 & 3 & 1 \\ 4 & -12 & 16 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 11 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 16 & -6 & -2 \\ 4 & -12 & 16 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 11 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(iii)  $P = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3]$  と置く.

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|} \mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{q}'_2 = \mathbf{p}_2 - (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{q}'_2\|} \mathbf{q}'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}'_3 = \mathbf{p}_3 - (\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 - (\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{q}'_3\|} \mathbf{q}'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

従って  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  を正規直交化したものは  $\left\{ \mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

(iv)  $Q = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$  と置く.

$${}^tQQ = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{q}_1 \\ {}^t\mathbf{q}_2 \\ {}^t\mathbf{q}_3 \end{bmatrix} [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3] = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1 & {}^t\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 & {}^t\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3 \\ {}^t\mathbf{q}_2\mathbf{q}_1 & {}^t\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2 & {}^t\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3 \\ {}^t\mathbf{q}_3\mathbf{q}_1 & {}^t\mathbf{q}_3\mathbf{q}_2 & {}^t\mathbf{q}_3\mathbf{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

より  $Q$  は直交行列.

$$\begin{aligned}
 {}^tQAQ &= \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & -3/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 8/\sqrt{6} & -6/\sqrt{6} \\ 0 & 2/\sqrt{2} & -2/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3/\sqrt{2} & 5/\sqrt{6} \\ 0 & 1 & 7/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(ii) の  $P$  と異なり,  $Q$  の各列ベクトルは  $A$  の固有ベクトルではない為,  $Q$  では  $A$  を対角化できない. □

p.137 【練習問題 5】 次の 2 次曲線の標準形を求め, 曲線の概形を描け.

$$5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 4x - 17 = 0$$

(首都大都市環境科学研究所 建築学専攻)

【解答】  $f_0(\mathbf{x}) = 5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2$  と置けば

$$5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = [x, y] \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} \quad (A = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix})$$

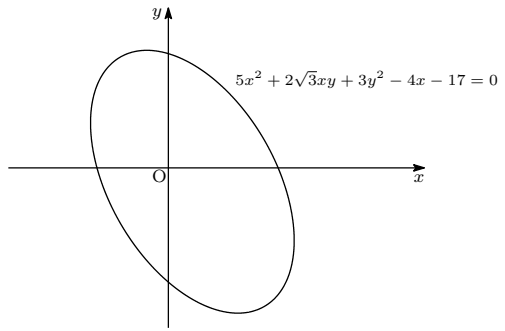
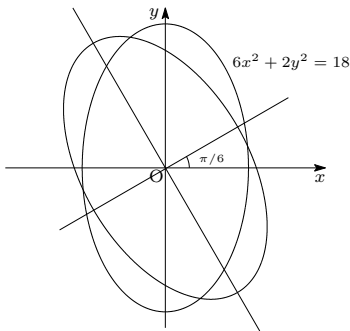
と表される.  $|tE - A| = (t - 2)(t - 6)$  であり,

$$A - 6E_2 = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A - 2E_2 = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より  $A$  の固有値  $6, 2$  に対応する固有ベクトルとして  $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$  がとれる. ここで  $P = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]$  と置く.  $P$  は直交行列であり,  ${}^tPAP = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  となる. ここで  $\mathbf{x}' = {}^tP\mathbf{x}$  と置けば

$$5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 4x - 17 = 6(x')^2 + 2(y')^2 - 2\sqrt{3}x' - 2y' - 17 = 0 \quad \therefore \frac{(x' - \frac{1}{2\sqrt{3}})^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{(y' - \frac{1}{2})^2}{3^2} = 1$$

変換  $P: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$  は原点を中心に反時計回りに  $\frac{\pi}{6}$  だけ回転させるものだから, 曲線は楕円  $6x^2 + 2y^2 = 18$  を原点を中心に反時計回りに  $\frac{\pi}{6}$  だけ回転させ,  $x$  軸方向に  $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ,  $y$  軸方向に  $\frac{1}{2}$  だけ平行移動したものになる. 概形は次の通り:



□

p.137 【練習問題 6】 実数  $a, b$  に対して行列  $A$  を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & a^2 & ab \\ b & ab & b^2 \end{pmatrix}$$

で定義する.

- (1)  $A \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$  を求めよ.
- (2)  $A$  の階数  $\text{rank } A$  を求めよ.
- (3)  $A$  の固有値を求めよ.
- (4)  $P^{-1}AP$  が対角行列となる正則行列  $P$  を 1 つ求めよ.

(筑波大数理工学研究所 数学専攻)

【解答】 (1)  $A \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a^2 + b^2 \\ a(1 + a^2 + b^2) \\ b(1 + a^2 + b^2) \end{pmatrix} = (1 + a^2 + b^2) \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ .

(2)  $A \xrightarrow[\text{③}-b \times \text{①}]{\text{②}-a \times \text{①}} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  が  $A$  の簡約化だから  $\text{rank } A = 1$ ,

- (3)  $A$  の核は 2 次元だから, (1) と合わせて  $A$  の固有値は  $1 + a^2 + b^2$  及び  $0$  (重複度 2).

(4)  $A$  の核は

$$A\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow x + ay + bz = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数})$$

だから, (1) の固有ベクトルと合わせて  $P = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$  と置けば  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  となる.  $\square$

p.138 【練習問題 7】 漸化式  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$  をみたす実数列  $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$  の全体を  $V$  とする.  $V$  に属する数列  $\mathbf{x} = \{x_n\}$ ,  $\mathbf{y} = \{y_n\}$  および実数  $\alpha$  に対して和  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x_n + y_n\}$  と  $\alpha\mathbf{x} = \{\alpha x_n\}$  を定義すると,  $V$  は線形空間である.

- (1)  $V$  に属する数列で, はじめの二項が  $x_1 = 1, x_2 = 0$  であるものを  $\mathbf{e}_1$ , はじめの二項が  $x_1 = 0, x_2 = 1$  であるものを  $\mathbf{e}_2$  とする.  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  が  $V$  の基底になることを示せ.
- (2)  $V$  の線形変換  $f$  を  $f(\{x_n\}) = \{y_n\}$ , ただし  $y_n = x_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) により定める. 線形変換  $f$  の  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  に関する表現行列  $A$  を求めよ.
- (3) 表現行列  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (4) 線形変換  $f$  の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京工業大学理工学研究科 数学専攻)

【解答】 (1)  $\mathbf{x} \in V$  に対し  $\mathbf{x}' = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$  と置く. 作り方より  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}'$  の最初の 2 項は一致.  $n \geq 3$  とし, 第  $n-1$  番目の項まで一致したとする.  $\mathbf{e}_i$  の第  $n$  項を  $e_{i,n}$  とすれば  $\mathbf{x}'$  の第  $n$  項は  $x_1e_{1,n} + x_2e_{2,n}$  であり,  $\mathbf{e}_i, \mathbf{x}$  に対する漸化式より

$$\begin{aligned} x_1e_{1,n} + x_2e_{2,n} &= x_1(e_{1,n-1} + e_{1,n-2}) + x_2(e_{2,n-1} + e_{2,n-2}) \\ &= (x_1e_{1,n-1} + x_2e_{2,n-1}) + (x_1e_{1,n-2} + x_2e_{2,n-2}) \\ &= x_{n-1} + x_{n-2} = x_n \end{aligned}$$

だから  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  となる. 従って  $V$  内のベクトルは  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  の 1 次結合で表される. また最初の 2 項を比較すれば 1 次独立である事も分かる. 従って  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  は  $V$  の基底である.

(2)  $f(\mathbf{e}_1)$  の最初の 2 項は  $0, 1$  だから  $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$ . 一方,  $f(\mathbf{e}_2)$  の最初の 2 項は  $1, e_{23} = e_{22} + e_{21} = 1$  だから  $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ . 従って  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  に関する  $f$  の表現行列は  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  である.

(3)  $|tE_2 - A| = t(t-1) - (-1)^2 = t^2 - t - 1 = \left(t - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(t - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ . 従って  $\omega_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  が  $A$  の固有値である.

簡約化

$$A - \omega_+ E_2 = \begin{bmatrix} -\omega_+ & 1 \\ 1 & \omega_- \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \omega_- \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A - \omega_- E_2 = \begin{bmatrix} -\omega_- & 1 \\ 1 & \omega_- \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \omega_+ \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より固有値  $\omega_+$  に対応する固有ベクトルは  $c \begin{bmatrix} \omega_- \\ -1 \end{bmatrix}$ , 固有値  $\omega_-$  に対応する固有ベクトルは  $c \begin{bmatrix} \omega_+ \\ -1 \end{bmatrix}$  ( $c$  は 0 以外の任意定数) となる.

(4)  $\mathbf{p}_1 = \omega_- \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{p}_2 = \omega_+ \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$  とおく.  $\omega_+ + \omega_- = 1, \omega_+ \omega_- = -1$  となる事に注意する.

$$f(\mathbf{p}_1) = \omega_- f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) = \omega_- \mathbf{e}_2 - (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 - \omega_+ \mathbf{e}_2 = \omega_+ \mathbf{p}_1$$

$$f(\mathbf{p}_2) = \omega_+ f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) = \omega_+ \mathbf{e}_2 - (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 - \omega_- \mathbf{e}_2 = \omega_- \mathbf{p}_2$$

従って  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  が  $f$  の固有値  $\omega_+, \omega_-$  に対する固有ベクトルになる.  $\square$

p.138 【練習問題 8】

(1) 以下に示す 3 次の実対称行列  $A, B$  について,  $AB = BA$  が成り立つとする. このとき  $a, b$  を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ b & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- (2) 行列  $A$  の固有値と、絶対値を 1 に規格化した固有ベクトルを求めよ。  
 (3) 適当な直交行列  $P$  を用いると、 $A' = P^T A P$  は対角行列となる。直交行列  $P$  と対角行列  $A'$  を求めよ。さらにこの  $P$  を用いて  $B' = P^T B P$  を計算し、 $B'$  も対角行列となることを確かめよ。ただし  $P^T$  は  $P$  の転置行列を表す。  
 (4) 3 次の実対称行列  $C$  が直交行列  $Q$  を用いて

$$C' = Q^T C Q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

のように対角化されるとする。ただし  $\alpha, \beta, \gamma$  は相異なる実数である。ここで 3 次の実対称行列  $D$  が  $CD = DC$  を満たすとき、同じ直交行列  $Q$  を用いて  $D' = Q^T D Q$  も対角行列となることを証明せよ。

(東京大工学系研究科)

【解答】(1)

$$AB = \begin{bmatrix} 6a-2b-1 & 6b+1 & 1 \\ -2a+6b-1 & -2b-7 & 1 \\ a+b-5 & b-6 & 23 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 6a-2b-1 & -2a+6b-1 & a+b-5 \\ 6b+1 & -2b-7 & b-6 \\ 1 & 1 & 23 \end{bmatrix}$$

$AB = BA$  ならば  $a = -1, b = 7$  となる。

(2)

$$|tE_3 - A| = \begin{vmatrix} t-6 & 2 & -1 \\ 2 & t-6 & -1 \\ -1 & -1 & t-5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}-\textcircled{2}} \begin{vmatrix} t-8 & -t+8 & 0 \\ 2 & t-6 & -1 \\ -1 & -1 & t-5 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)} \begin{vmatrix} t-8 & 0 & 0 \\ 2 & t-4 & -1 \\ -1 & -2 & t-5 \end{vmatrix} \\ = (t-8)(t-3)(t-6)$$

より  $A$  の固有値は 3, 6, 8. 各固有値に対応する特性行列を簡約化すると

$$A - 3E_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A - 6E_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A - 8E_3 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

これらより固有値 3, 6, 8 に対応し、長さが 1 となる固有ベクトルはそれぞれ  $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

(3) (2) の固有ベクトルを用いて  $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}$  と置く。対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交する事から  $P$  は直交行列となり、この  $P$  により  $P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$  となる。さらに

$$P^T B P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 7 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 7/\sqrt{3} & 7/\sqrt{3} & -7/\sqrt{3} \\ 4/\sqrt{6} & 4/\sqrt{6} & 8/\sqrt{6} \\ -8/\sqrt{2} & 8/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

(4)  $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \beta, \alpha_3 = \gamma, Q^T D Q = [d_{ij}]$  とする。  $CD = DC, (Q^T C Q)(Q^T D Q) = (Q^T D Q)(Q^T C Q)$  及び

$$(Q^T C Q)(Q^T D Q) = \begin{bmatrix} \alpha_1 d_{11} & \alpha_1 d_{12} & \alpha_1 d_{13} \\ \alpha_2 d_{21} & \alpha_2 d_{22} & \alpha_2 d_{23} \\ \alpha_3 d_{31} & \alpha_3 d_{32} & \alpha_3 d_{33} \end{bmatrix}, \quad (Q^T D Q)(Q^T C Q) = \begin{bmatrix} \alpha_1 d_{11} & \alpha_2 d_{12} & \alpha_3 d_{13} \\ \alpha_1 d_{21} & \alpha_2 d_{22} & \alpha_3 d_{23} \\ \alpha_1 d_{31} & \alpha_2 d_{32} & \alpha_3 d_{33} \end{bmatrix}$$

より  $\alpha_i d_{ij} = \alpha_j d_{ij}$  が成立。仮定より  $i \neq j$  ならば  $\alpha_i \neq \alpha_j$  より  $d_{ij} = 0$ . 従って  $Q^T D Q$  は対角行列となる。  $\square$