第 3 章

p. 79 【練習問題 1】 3 次元直交座標系を考える．以下の問いに答えよ．

(a) 3 点 A $(a,0,0)$，B $(0,b,0)$，C $(0,0,c)$ を通る平面 ABC の方程式を求めよ．また，その平面の法線ベクトルを求めよ．ただし a,b,c は 0 でない実数とする．また導出する法線ベクトルは単位ベクトルとする．

(b) 原点 O $(0,0,0)$ を通り，平面 ABC に垂直な直線の方程式を求めよ．

(c) 原点 O $(0,0,0)$ と平面 ABC の距離を求めよ．

(電気通信大電気通信学研究科 電子情報学専攻)

【解答】(a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-a,b,0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-a,0,c)$ より平面 ABC の法線ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{bmatrix}bc\\ca\\ab\end{bmatrix}$，従って単位法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}\begin{bmatrix}bc\\ca\\ab\end{bmatrix}$．また求める平面は A を通るから，その方程式は

$$bc(x-a)+cay+abz=0, \qquad \therefore\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$$

(b) 平面 ABC に直交する直線は法線ベクトルを方向ベクトルに持つ．原点を通る事から求める方程式は $\dfrac{x}{bc}=\dfrac{y}{ca}=\dfrac{z}{ab}$ (または $ax=by=cz$)．

(c) 点と平面との距離の公式より $d=\dfrac{|0-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}}=\dfrac{|abc|}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$． □

p.80 【練習問題 2】 以下の問いに答えよ．

1) 3 点 P $(2,-1,3)$，Q $(-1,2,1)$，R $(3,1,-1)$ を通る平面の方程式を求めよ．

2) 4 点 P $(1,3,2)$，Q $(1,1,4)$，R $(4,-1,2)$，S $(4,6,1)$ が同一平面上にあるか調べよ．結論だけでなく理論や根拠も示せ．

(電気通信大電気通信学研究科 電子情報学専攻)

【解答】1) 求める方程式を $ax+by+cz=d$ だとする．上の 3 点を代入して $\begin{cases}2a-b+3c-d=0\\-a+2b+c-d=0\\3a+b-c-d=0\end{cases}$ この方程式の拡大係数行列を簡約化すると

$$\begin{bmatrix}2&-1&3&-1\\-1&2&1&-1\\3&1&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{①+2\times②\\③+3\times②}]{}\begin{bmatrix}0&3&5&-3\\-1&2&1&-1\\0&7&2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[③-2\times①]{}\begin{bmatrix}0&3&5&-3\\-1&2&1&-1\\0&1&-8&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{①-3\times③\\②-2\times③}]{}\begin{bmatrix}0&0&29&-9\\-1&0&17&-5\\0&1&-8&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{①\div 29\\②\times(-1)}]{}\begin{bmatrix}0&0&1&-\frac{9}{29}\\1&0&-17&5\\0&1&-8&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{②+17\times①\\③+8\times①}]{}\begin{bmatrix}0&0&1&-\frac{9}{29}\\1&0&0&-\frac{8}{29}\\0&1&0&-\frac{14}{29}\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{①\to③\\②\to①\\③\to②}]{}\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{8}{29}\\0&1&0&-\frac{14}{29}\\0&0&1&-\frac{9}{29}\end{bmatrix}$$

従って $(a,b,c,d)=(8t,14t,9t,29t)$ (t は任意定数)．これより P,Q,R を通る方程式は $8x+14y+9z=29$.

【別解】 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\begin{bmatrix}-3\\3\\-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\2\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\-14\\-9\end{bmatrix}$ だから P,Q,R を通る平面の方程式は $-8(x-2)+(-14)(y-(-1))+(-9)(z-3)=0$, $\therefore\ 8x+14y+9z=29$.

2) 4 点 P,Q,R,S が同一平面上にある $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\overrightarrow{\mathrm{PR}},\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ は 1 次従属 $\Leftrightarrow$ 行列式 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\overrightarrow{\mathrm{PR}},\overrightarrow{\mathrm{PS}}|$ は 0 である．

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\overrightarrow{\mathrm{PR}},\overrightarrow{\mathrm{PS}}|=\begin{vmatrix}0&3&3\\-2&-4&3\\2&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&3&3\\0&-4&2\\2&0&-1\end{vmatrix}=36\neq 0.$$

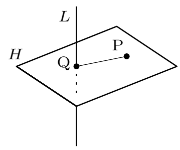
従って $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{PR}}, \overrightarrow{\mathrm{PS}}$ は 1 次独立だから，4 点は同一平面上にはない． □

p. 82 **【練習問題 3】** 直線 $L: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$，および点 P: $(3,2,3)$ について

(1) 点 P と直線 L との最短距離，

(2) 点 P を通り，直線 L と直交する平面の方程式 をそれぞれ求めよ．

(首都大都市環境科学研究科 建築学専攻)



【解答】 点 P を通り直線 L に直交する平面 H は $2(x-3)+2(y-2)+(z-3)=0$，$2x+2y+z-13=0$． L の点を $(2t+2, 2t+1, t+1)$ と表し，これを H の方程式に代入すると

$$2(2t+2)+2(2t+1)+t+1-13=0, \qquad t=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad \text{直線 } L \text{ と平面 } H \text{ との交点 Q は } \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

$$\therefore \quad (\text{点 P と直線 } L \text{ の最短距離}) = (\text{点 P と交点 Q の距離}) = \sqrt{\left(3-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(2-\frac{7}{3}\right)^2 + \left(3-\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{2}$$

□

p. 83 **【練習問題 4】** 直線 $x=y=z$ と直線 $6(x-1)=4(y-2)=3z$ の 2 つの直線がなす角度を求めよ．

(首都大都市環境科学研究科 建築学専攻)

【解答】 $\boldsymbol{a} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ は 1 つ目の直線の単位方向ベクトルとなる． 2 つ目の直線の方程式を 12 で割れば，方向ベクトルは $(2,3,4)$ と平行だから，$(2/\sqrt{29}, 3/\sqrt{29}, 4/\sqrt{29})$ が単位方向ベクトルとなる． 2 つの直線が成す角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{\sqrt{29}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{9}{\sqrt{3}\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{87}}{29} \qquad \therefore \quad \theta = \cos^{-1}\frac{3\sqrt{87}}{29}$$

□

p. 87 **【練習問題 5】** 2 つのベクトル $\mathbf{A} = (-1,3,1)$，$\mathbf{B} = (2,4,-3)$ について以下の値を求めよ．

(a) $\|\mathbf{A}\|$， (b) $\mathbf{B}$ 方向の単位ベクトル， (c) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$， (d) $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角

(電気通信大電気通信学研究科 知能機械工学専攻)

【解答】 (a) $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{(-1)^2+3^2+1^2} = \sqrt{11}$.

(b) $\|\mathbf{B}\| = \sqrt{2^2+4^2+(-3)^2} = \sqrt{29}$ より $\mathbf{B}$ 方向の単位ベクトルは $\pm(2/\sqrt{29}, 4/\sqrt{29}, -3/\sqrt{29})$.

(c) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (-1)\cdot 2 + 3\cdot 4 + 1\cdot(-3) = 7$

(d) なす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|} = \frac{7}{\sqrt{11}\sqrt{29}} \qquad \therefore \quad \theta = \cos^{-1}\frac{7}{\sqrt{319}}$$

□

p. 88 **【練習問題 6】** $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ を空間のベクトルとするとき，以下の不等式を証明せよ．

$$\text{(a) } |\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|, \qquad \text{(b) } \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}-\mathbf{C}\| + \|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|$$

(電気通信大電気通信学研究科 知能機械工学専攻)

【解答】 (a) $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角を θ $(0 \le \theta \le \pi)$ とする． $|\cos\theta| \le 1$ と内積の定義より

$$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\||\cos\theta| \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|.$$

(b) 内積の性質と (a) よりベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\ &\le \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| + \|\boldsymbol{y}\|^2 \le \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2\end{aligned}$$

よって $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ となる． ここで $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}-\mathbf{C}$, $\boldsymbol{y} = \mathbf{C}-\mathbf{B}$ と置けば

$$\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}-\mathbf{C}+\mathbf{C}-\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}-\mathbf{C}\| + \|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|.$$

□

p.90 補足 上に与えた組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4\}$ は行列 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4]$ の簡約化に基づく選択だが， 他に $\{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ としても一次独立な組となる． 実際， 並べ方を替えた行列 $[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4]$ を簡約化すると

$$[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4] \;\to\; \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

だから $\{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ は一次独立となる． 他に $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ も一次独立である事が分かる． 一次独立な組は (常に個数は一致するが) 一意とは限らない (ちなみに， 同じ 3 個の組でも $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は一次独立ではない).