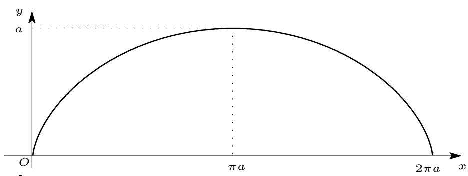
第 7 章

p.240 〔**練習問題 1**〕 以下の式によって定まる xy 平面の曲線 C について，以下の 5 つの設問全てに解答せよ．ただし a は正の定数とする．

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(1) xy 平面上に曲線 C を図示せよ．
(2) 曲線の長さを求めよ．
(3) 曲線 C と x 軸に囲まれる図形の面積を求めよ．
(4) 曲線 C と x 軸に囲まれる図形を x 軸まわりに回転してできる立体の体積を求めよ．
(5) 曲線 C と x 軸に囲まれる図形を y 軸まわりに回転してできる立体の体積を求めよ．
(H21 東大新領域創成科学研究科)

【解答】 (1) 図は以下の通り：



(2) $\dfrac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$, $\dfrac{dy}{dt} = a\sin t$ より曲線の長さ ℓ は

$$\ell = \int_C \sqrt{dx^2+dy^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\ dt$$
$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\ dt = 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\ dt = 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}}\ dt$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ で $\sin \dfrac{t}{2} > 0$ だから

$$\ell = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\ dt = 2a\left[-2\cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a.$$

(3) $\dfrac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$ より面積 S は

$$S = \int_0^{2\pi a} y dx = \int_0^{2\pi} y\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\ dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t + \cos^2 t)dt$$
$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = a^2\left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

(4) $\dfrac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$ より体積 V は

$$V = \int_0^{2\pi a} \pi y^2 dx = \pi\int_0^{2\pi} y^2\frac{dx}{dt}dt = \pi\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3\ dt$$
$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt$$
$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t + 3\frac{1+\cos 2t}{2} - \frac{3\cos t + \cos 3t}{4}\right)dt$$
$$= \pi a^3\left[\frac{5}{2}t - \frac{15}{4}\sin t + \frac{3\sin 2t}{4} - \frac{\sin 3t}{12}\right]_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

(5) $\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$ より求める体積 V は

$$\begin{aligned}V=&\int_0^{2\pi a}2\pi xydx=\int_0^{2\pi}2\pi a^3(t-\sin t)(1-\cos t)^2dt\\=&2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-2t\cos t+t\cos^2 t-\sin t+2\sin t\cos t-\sin t\cos^2 t)dt\\=&2\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}t-2t\cos t+\frac{1}{2}t\cos 2t-\sin t+\sin 2t-\sin t\cos^2 t\right)dt.\end{aligned}$$

部分積分等より

$$\int_0^{2\pi}t\cos t\ dt=\Big[t\sin t\Big]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin tdt=0,\qquad \int_0^{2\pi}t\cos 2t\ dt=\left[\frac{1}{2}t\sin 2t\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2tdt=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin t\ dt\ =\int_0^{2\pi}\sin 2t\ dt=0,\qquad \int_0^{2\pi}\sin t\cos^2 t\ dt=\left[-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi}=0$$

だから $V=2\pi a^3\left[\dfrac{3}{4}t^2\right]_0^{2\pi}=6\pi^3a^3.$ □

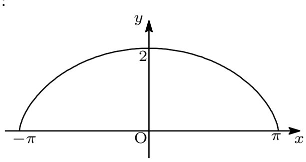
p.240 〔**練習問題 2**〕 xy 平面上の曲線 $C:\begin{cases}x=\theta+\sin\theta\\ y=1+\cos\theta\end{cases}\quad(-\pi\le\theta\le\pi)$，および C と x 軸とで囲まれる領域 D について，次の問いに答えよ．

(i) C 上で y は x の関数となるが，これを $y=\varphi(x)$ $(-\pi\le x\le\pi)$ と表す．$\theta=\pi/3$ に対応する C 上の点を (x_0,y_0) とするとき，$\varphi'(x_0)$，$\varphi''(x_0)$ を計算せよ．

(ii) D の面積 $\displaystyle\iint_D dxdy$ を求めよ．

(iii) D の重心 (x_D,y_D) を求めよ．但し x_D,y_D は次式で与えられる：

$$x_D=\frac{\iint_D xdxdy}{\iint_D dxdy},\quad y_D=\frac{\iint_D ydxdy}{\iint_D dxdy}$$



(H16 電通大電気通信学研究科 情報通信工学専攻)

【解答】 (i) $\varphi'(x)=\dfrac{dy}{d\theta}\dfrac{1}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}$ および

$$\varphi''(x)=\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{d\theta}\right)=\frac{1}{1+\cos\theta}\frac{-\cos\theta(1+\cos\theta)-(-\sin\theta)(-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2}=-\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}$$

より $\varphi'(x_0)=\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\varphi''(x_0)=-\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}=-\dfrac{4}{9}.$

(ii) $D=\{(x,y):-\pi\le x\le\pi,\ 0\le y\le\varphi(x)\}$，$\dfrac{dx}{d\theta}=1+\cos\theta$ より

$$\begin{aligned}\iint_D dxdy&=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\varphi(x)}dy\right)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta\\&=\int_{-\pi}^{\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}=3\pi.\end{aligned}$$

(iii) $(\theta+\sin\theta)(1+\cos\theta)^2$ は奇関数だから

$$\iint_D xdxdy=\int_{-\pi}^{\pi}x\left(\int_0^{\varphi(x)}dy\right)dx=\int_{-\pi}^{\pi}x\varphi(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}(\theta+\sin\theta)(1+\cos\theta)^2d\theta=0,$$

$(1+\cos\theta)^3$ は偶関数だから

$$\iint_D y dx dy = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\varphi(x)} y dy\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)^2 dx = \int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3 d\theta = \int_0^{\pi}(1-\sin(\theta-\frac{\pi}{2}))^3 d\theta$$

$\tau = \theta - \frac{\pi}{2}$ と置換して

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-3\sin\tau+3\sin^2\tau-\sin^3\tau)d\tau \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{3}{2}(1-\cos 2\tau)d\tau = 2\left[\frac{5}{2}\theta-\frac{3}{4}\sin 2\tau\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{2}\pi.
\end{aligned}$$

従って $(x_D, y_D) = (0, \frac{5}{2}\pi)$. □

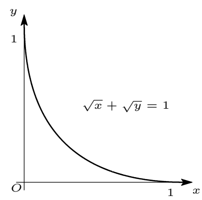
p.243 〔練習問題 3〕 原点 $\mathrm{O}(0,0)$ から点 $\mathrm{P}(x, x^2/2)$ までの区間の放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ に沿った長さを求めよ.
(H19 東大理学研究科地球惑星科学専攻)

【解答】 部分積分より 長さ ℓ は

$$\begin{aligned}
\ell = \int_C \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^x \sqrt{1+x^2}\, dx \\
= \left[\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)
\end{aligned}$$

□

p.243 〔練習問題 4〕 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の長さを求めよ.



【解答】 曲線は第 1 象限内にある事に注意し, $x=\cos^4 t,\ y=\sin^4 t \quad (0 \le t \le \pi/2)$ と置く. $\dot{x} = -4\cos^3 t\sin t,\ \dot{y} = 4\sin^3 t\cos t$ より

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_C \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int_0^{\pi/2}\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} 4\sin t\cos t\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}\, dt.
\end{aligned}$$

$\cos^4 t+\sin^4 t = (\cos^2 t+\sin^2 t)^2 - 2\cos^2 t\sin^2 t = 1-\frac{\sin^2 2t}{2} = \frac{\cos^2 2t+1}{2}$ より $s=\cos 2t$ と置けば

$$\ell = 2\int_0^{\pi/2}\sin 2t\sqrt{\frac{\cos^2 2t+1}{2}}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{s^2+1}\, ds$$

公式 $\int\sqrt{s^2+1}ds = \frac{1}{2}(s\sqrt{s^2+1}+\log|s+\sqrt{s^2+1}|)$ (p.8) より

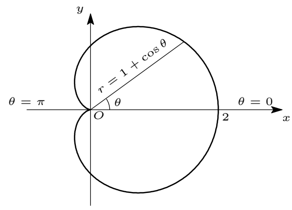
$$\ell = \sqrt{2}\int_0^1\sqrt{s^2+1}\, ds = \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}(s\sqrt{s^2+1}+\log|s+\sqrt{s^2+1}|)\right]_0^1 = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2})$$

□

p.247 〔練習問題 5〕 カージオイド $r = 1+\cos\theta$ を x 軸の周りに回転させたときにできる立体の表面積 A を求めよ. (H19 東大工学研究科原子力国際専攻)

【解答】 一般に極方程式 $r=f(\theta)\quad(0\le\theta\le\pi)$ で与えられる曲線を x 軸に関し 1 回転して得られる立体の表面積は

$$S=2\pi\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta\sqrt{f'(\theta)^2+f(\theta)^2}d\theta$$



で与えられる．$f(\theta)=1+\cos\theta$ とすると

$$\begin{aligned}&\int f(\theta)\sin\theta\sqrt{f'(\theta)^2+f(\theta)^2}d\theta\\ =&\int(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}d\theta=\sqrt{2}\int\sin\theta(+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}d\theta\end{aligned}$$

$t=\cos\theta$ と置けば $-dt=\sin\theta d\theta$ だから

$$\int f(\theta)\sin\theta\sqrt{f'(\theta)^2+f(\theta)^2}d\theta=-\sqrt{2}\int(1+t)^{\frac{3}{2}}dt=-\frac{2\sqrt{2}}{5}(1+\cos\theta)^{\frac{5}{2}}$$

$$\therefore\quad S=2\pi\int_0^\pi(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{(-\sin\pi)^2+(1+\cos\theta)^2}d\theta=-2\pi\cdot\frac{2\sqrt{2}}{5}(0-4\sqrt{2})=\frac{32}{5}\pi.$$

□

〔備考〕 **1.** 一般に関数 $f(x)\quad(a\le x\le b)$ のグラフを xy 平面の のグラフを x 軸に関し 1 回転させたときの回転体の表面積を S は次で与えられる：

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

実際，S は回転体の $z\ge 0$ にある部分の表面積を 2 倍すればよい．回転体の方程式は $y^2+z^2=f(x)^2$ であるから，$z\ge 0$ ある部分の (x,y) での高さは $z=\sqrt{f(x)^2-y^2}$ となる．

$$z_x=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f(x)^2-y^2}},\qquad z_y=-\frac{y}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}$$

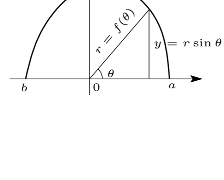
$$\therefore\quad\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{f(x)^2f'(x)^2}{f(x)^2-y^2}+\frac{y^2}{f(x)^2-y^2}}=f(x)\frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}.$$

回転体が囲む xy 平面の部分を $D=\{(x,y):$ とすれば

$$\begin{aligned}S=&2\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=4\int_a^b\left(\int_0^{f(x)}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dy\right)dx\\ =&4\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\left(\int_0^{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}dy\right)dx.\\ =&2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx.\qquad\qquad(\because\ \text{公式}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\pi}{2}\ \text{より})\end{aligned}$$

2. 右図のように極方程式 $r=f(\theta)$ により与えられる曲線で囲まれる図形を x 軸に関し 1 回転させたときの回転体の表面積を求める．ただし同じ x 座標を持つ曲線上の点は高々 1 個だとする．このとき $y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$ かつ

$$\begin{aligned}dx&=\frac{dx}{d\theta}d\theta=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta,\\ \frac{dy}{dx}&=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}\end{aligned}$$



だから，これを **1.** の式に代入して整理すれば

$$S=2\pi\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta\sqrt{f'(\theta)^2+f(\theta)^2}d\theta$$

となる．

□

p.259 〔**練習問題 6**〕 a を正の定数とするとき，$(x^2+y^2+ax)^2 = a^2(x^2+y^2)$ で表される曲線について，以下の問いに答えよ．

(1) この曲線を極座標で表せ．

(2) この曲線を xy 平面上に図示せよ． x または y が最大または最小となる点の座標を全て求めよ．

(3) この曲線の全長を求めよ．

(4) この曲線が囲む領域の面積を求めよ．

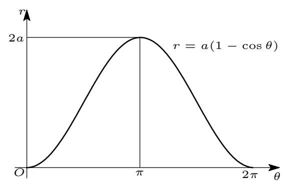
(H22 東北大工学研究科 機械知能専攻)

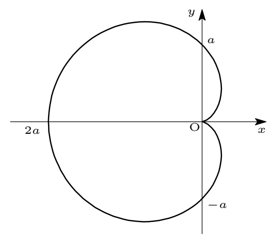
【解答】 (1) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \ \ (r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ とする．

$$(r^2 + ar\cos\theta)^2 = a^2r^2, \qquad r^2\{(r+a\cos\theta)^2 - a^2\} = r^2(r+a\cos\theta - a)(r+a\cos\theta+a) = 0$$

$r > 0$ だとすると $r = \pm a - a\cos\theta)$． $-a(1+\cos\theta)$ は非正だから $r = -a(1+\cos\theta)$ とはならない． 従って $r=0 \ \ (\theta = 0)$ の場合も合わせて $r = a(1-\cos\theta)$ となる．

(2)





曲線は右上図の通り． x, y を θ で微分すると

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta)'\cos\theta + a(1-\cos\theta)(\cos\theta)' = a\sin\theta(2\cos\theta - 1),$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= a(1-\cos\theta)'\sin\theta + a(1-\cos\theta)(\sin\theta)' = a\sin^2\theta + a\cos\theta - a\cos^2\theta \\ &= -a(2\cos^2\theta - \cos\theta - 1) = -a(\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 1).\end{aligned}$$

θ に関する x, y の増減は次の通り：

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5\pi}{3}$	$\cdots$	2π
x'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
x	0	$\nearrow$	$\frac{a}{4}$	$\searrow$	$-2a$	$\nearrow$	$\frac{a}{4}$	$\searrow$	0

θ	0	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{4\pi}{3}$	$\cdots$	2π
y'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}a}{4}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}a}{4}$	$\nearrow$	0

この表より x 座標が最大になる点の座標は $(\frac{a}{4}, \pm\frac{\sqrt{3}a}{4})$， 最小となる点の座標は $(-2a, 0)$， y 座標が最大になる点の座標は $(-\frac{3a}{4}, \frac{3\sqrt{3}a}{4})$，最小となる点の座標は $(-\frac{3a}{4}, -\frac{3\sqrt{3}a}{4})$ となる．

(3) x', y' で θ に関する微分を表す． (2) の計算結果と $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より

$$\begin{aligned}(x')^2 + (y')^2 =& a^2\sin^2\theta(2\cos\theta - 1)^2 + a^2(\cos\theta - 1)^2(2\cos\theta + 1)^2 \\ =& a^2\sin^2\theta(4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1) + a^2(\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1)(4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1) \\ =& a^2(4\sin^2\theta\cos^2\theta - 4\sin^2\theta\cos\theta + \sin^2\theta \\ & \quad + 4\cos^4\theta - 4\cos^3\theta - 3\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1) \\ =& a^2(2 - 2\cos\theta) = 4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}|d\theta| = 2a|\sin\frac{\theta}{2}||d\theta|.$$

曲線は x 軸に関し対称だから，その全長 ℓ は $y \geq 0$ の範囲にある部分を 2 倍すればよい．

$$\ell = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2 \cdot 2a \int_0^\pi \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 4a \left[-2 \cos \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi = 8a.$$

(4) 曲線は x 軸に関し対称だから，$y \geq 0$ にある部分の面積を 2 倍すればよい．

$$\begin{aligned} S =& 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 d\theta = a^2 \int_0^\pi (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta \\ =& a^2 \int_0^\pi (1 - 2\cos\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)) d\theta = a^2 \left[\frac{3\theta}{2} - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^\pi = \frac{3\pi a^2}{2} \end{aligned}$$

□

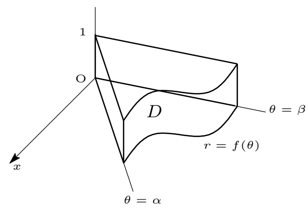
〔備考〕極方程式 $r = f(\theta)$ で表される曲線と半直線 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ で囲まれた部分 D の面積を S とする．極座標を用いれば

$$D = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta,\ 0 \leq r \leq f(\theta)\}$$

と表される．そこで極座標に変数変換すれば

$$S = \iint_D 1 dxdy = \iint_D 1 r dr d\theta = \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{f(\theta)} r dr \right) d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta$$

となる．



□

p.267 〔**練習問題 7**〕 三角形 ABC の辺 AB と BC をそれぞれ $t : 1-t$ の比率で分割する点を D,E とする．さらに，線分 DE を $t : 1-t$ の比率で分割する点を F とおく．いま，t を 0 から 1 まで変化させたとき，点 F の軌跡 (locus or trajectory) は三角形 ABC の内部に曲線 β を描く．この曲線 β は 3 点 A,B,C で決まるベジェ曲線 (Béjier Curve) とよばれる．3 点を与える順序が変わると，同じ三角形でも描かれる曲線が変わることに注意せよ．図 1 にベジェ曲線の例を示す．

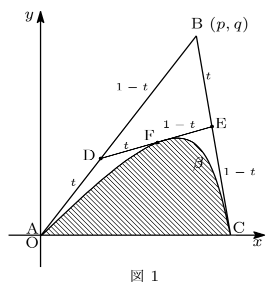


図 1

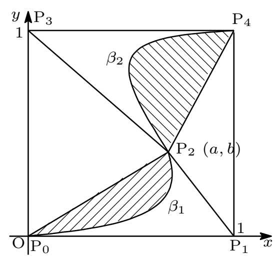


図 2

$\boxed{1}$ 三角形 ABC が図 1 に示すように配置されていて，点 A, B, C の座標は，それぞれ $(0,0)$, (p,q), $(1,0)$ であるとする．ただし $0 < p < 1$, $q > 0$ である．このとき以下の設問に答えよ．

(1) 点 D と E の座標を p, q, t を用いて表せ．

(2) 点 F の座標 (x, y) はそれぞれ t のある多項式 $f(t), g(t)$ によって $x = f(t)$, $y = g(t)$ と表される．この多項式 $f(t), g(t)$ を求めよ．

(3) 曲線 β と x 軸で囲まれた領域の面積 $M = \displaystyle\int_0^1 y dx$ を置換積分 (integration by substitution) を用いて求めよ．さらに M と三角形 ABC の面積 N の比 M/N を求めよ．

(4) (3) の結果を用いて，点 C の座標が $(r, 0)$ で与えられる場合の面積 M を求めよ．ただし A, B の座標は図 1 と同じで，さらに $r > 0$, $0 < p < r$, $0 < q$ とする．

$\boxed{2}$ 図 2 において，正方形 $P_0P_3P_4P_1$ の内部に任意にとった点 P_2 の座標を (a, b) とおく．3 点 P_2, P_1, P_0 で決まるベジェ曲線 β_1 と線分 P_2P_0 で囲まれた領域の面積と，3 点 P_2, P_3, P_4 で決まるベジェ曲線 β_2 と線分 P_2P_4 で囲まれた領域の面積

の和を求めよ．

$\boxed{3}$ 再び図 1 において，点 B が円

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

上を動くとき，曲線 β 上で y 座標が最大値をとる点 G の軌跡を求めよ．
(H19 電通大情報システム研究科)

【解答】 $\boxed{1}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{bmatrix}tp\\tq\end{bmatrix}$． $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1-p\\-q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1-p)t+p\\(1-t)q\end{bmatrix}$．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\begin{bmatrix}tp\\tq\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}(1-p)t+p-tp\\(1-t)q-tq\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1-2p)t^2+2pt\\-2qt^2+2qt\end{bmatrix}$ より $f(t)=(1-2p)t^2+2pt$，$g(t)=-2qt^2+2qt$．

(3) $x=f(t)$，$y=g(t)$ 及び $dx=(2(1-2p)t+2p)dt$ より

$$\begin{aligned}M&=\int_0^1(-2qt^2+2qt)\cdot(2(1-2p)t+2p)dt=\int_0^1\{-4(1-2p)qt^3+4(1-3p)qt^2+4pqt\}dt\\&=-(1-2p)q+\frac{4}{3}(1-3p)q+2pq=\frac{q}{3}\end{aligned}$$

$N=q/2$ より $M/N=2/3$．

(4) x,y のスケールを $1/r$ 倍すれば (3) の状況と一致する．ただし $\mathrm{B}(p,q)$ は $\mathrm{B}(p/r,q/r)$ とよみかえる．$1/r$ 倍した場合の M,N はそれぞれもとの $(1/r)^2$ 倍．(3) の結果より $(1/r)^2M=(q/r)/3$． $\therefore$ $M=qr/3$．

$\boxed{2}$ $\triangle\mathrm{P_0P_1P_2}$ の面積は $b/2$． $\boxed{1}$の結果より $\mathrm{P_0P_2}$ とベジェ曲線で囲まれる部分の面積は $(2/3)\cdot(b/2)=b/3$． $\triangle\mathrm{P_2P_3P_4}$ の面積は $(1-b)/2$． $\boxed{1}$の結果より $\mathrm{P_2P_4}$ とベジェ曲線で囲まれる部分の面積は $(2/3)\cdot((1-b)/2)=(1-b)/3$．よってこれらの面積の和は $1/3$．

$\boxed{3}$ $\dot{y}=-4qt+2q$，$\dot{y}=0 \Leftrightarrow t=1/2$．従って点 G の座標は $(x,y)=((1+2p)/4,q/2)$． $p-(1/2)=2x-1, q=2y$ より

$$\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+q^2=(2x-1)^2+(2y)^2=\frac{1}{4},\qquad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

即ち点 G の軌跡は $(1/2,0)$ を中心とする半径 $1/4$ の円である． □