

第 6 章

p.210

〔練習問題 1〕 2 つの実数の組  $(a, b)$  に対して,  $F(a, b)$  を次のように定める.

$$F(a, b) = \int_{D(a, b)} \sqrt{1 - e^a x^2 - e^b y^2} dx dy$$

ここで  $D(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^a x^2 + e^b y^2 \leq 1\}$  である.

- (1)  $F(a, b)$  を求めよ.
  - (2) 条件  $a^2 + b^2 = 1$  のもとで,  $F(a, b)$  の最大値と最小値を求めよ.
- (H22 筑波大数理物質科学研究科)

【解答】 (1)  $x = e^{-\frac{a}{2}} r \cos \theta, y = e^{-\frac{b}{2}} r \sin \theta$  と変数変換する. このとき

$$D(a, b) \leftrightarrow D' = \left\{ (r, \theta) : \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right\}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{bmatrix} e^{-\frac{a}{2}} \cos \theta & -e^{-\frac{a}{2}} r \sin \theta \\ e^{-\frac{b}{2}} \sin \theta & e^{-\frac{b}{2}} r \cos \theta \end{bmatrix} = e^{-\frac{a+b}{2}} r$$

より

$$F(a, b) = \int_{D'} \sqrt{1 - r^2} e^{-\frac{a+b}{2}} r dr d\theta = e^{-\frac{a+b}{2}} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr \right) d\theta = 2\pi e^{-\frac{a+b}{2}} \left[ -\frac{1}{3} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

故に  $F(a, b) = \frac{2\pi}{3} e^{-\frac{a+b}{2}}$ .

(2)  $a = \cos t, b = \sin t$  とすると  $e^{-\frac{1}{2}(a+b)} = e^{-\frac{1}{2}(\cos t + \sin t)} = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t + \frac{\pi}{4})}$ .  $0 \leq t \leq 2\pi$  で  $-1 \leq \sin(t + \frac{\pi}{4}) \leq 1$  だから, 条件  $a^2 + b^2 = 1$  の下で  $e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \leq e^{-\frac{a+b}{2}} \leq e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$  となる.

$$\therefore \quad \text{最大値 } F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \quad \text{最小値 } F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}. \quad \square$$

p.215 〔練習問題 2〕  $x, y$  の関数  $f(x, y) = x^4 + 2x^2 - 4xy + y^2 + 1$  の極値を求めよ. (2004 東京農工大機械システム)

【解答】  $f_x = 4x^3 + 4x - 4y, f_y = -4x + 2y, f_{xx} = 12x^2 + 4, f_{xy} = -4, f_{yy} = 2$ .

$f_x = f_y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0), (\pm 1, \pm 2)$  である.  $\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$  と置くととき,

- ・  $\Delta(0, 0) = 4 \cdot 2 - (-4)^2 < 0$  より  $f(0, 0)$  は極値ではない.
- ・  $\Delta(\pm 1, \pm 2) = (12 + 4) \cdot 2 - (-4)^2 > 0, f_{xx}(\pm 1, \pm 2) = 12 + 4 > 0$  より  $f(1, 2), f(-1, -2)$  は共に極小値となる.

従って  $f(x, y)$  は 極小値  $f(1, 2) = f(-1, -2) = 0$  を持つ. □

p.215 〔練習問題 3〕 実 2 変数関数  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2$  を考える.  $f$  の偏導関数を  $f_x, f_y$  で表す. 以下の問に答えよ.

- (1)  $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$  を満たす点  $(x, y)$  をすべて求めよ.
  - (2)  $\mathbb{R}^3$  内の曲面  $z = f(x, y)$  の, 平面  $y = 0$  による切口  $C$ , 及び平面  $y = x$  による切口  $D$  の概形を描け.
  - (3) 関数  $f(x, y)$  の極値をすべて求めよ.
- (H23 九大数理学府)

【解答】 (1)  $f_x(x, y) = 4x^3 - 2x + 2y, f_y(x, y) = 4y^3 + 2x - 2y$  より  $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x + y = 0 \\ 2y^3 + x - y = 0 \end{cases}$ .

第 1 式  $x = y - 2y^3$  を第 2 式に代入して

$$2(y - 2y^3)^3 - (y - 2y^3) + y = 2y^3\{(1 - 2y^2)^3 + 1\} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ または } (1 - 2y^2)^3 + 1 = 0$$

右辺の第 2 式について  $1 - 2y^2 = Y$  と置けば

$$(1 - 2y^2)^3 + 1 = (Y + 1)(Y^2 - Y + 1) = (Y + 1) \left\{ \left( Y - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right\}.$$

最右辺の第 2 因子は常に正だから実数の範囲では  $(1 - 2y^2)^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$  となる. 再び  $x = y - 2y^3$  を用いれば  $(x, y) = (0, 0), (1, -1), (-1, 1)$

(2) 切り口  $C$  は  $xz$  平面上  $z = x^4 - x^2$  により与えられるグラフであり

(i)  $z = 0 \Leftrightarrow x = 0, 1, -1$

(ii)  $z' = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$   
 $= 2x(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$

(iii)  $z'' = 12x^2 - 2 = 2(\sqrt{6}x - 1)(\sqrt{6}x + 1)$

$x$	0	...	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1	...
$f'(x)$	0	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	0	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	0	↘	$-\frac{5}{36}$	↖	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘

だから, これらより右の増減表を得る.

また  $x^4 - x^2$  は偶関数だからグラフ  $z = x^4 - x^2$  は  $z$  軸対称である事から  $C$  は下図 1 のようになる. 次に  $x = y = \frac{t}{\sqrt{2}}$  とすると  $f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{t^4}{2}$  だから切り口  $D$  は下図 2 のようになる.

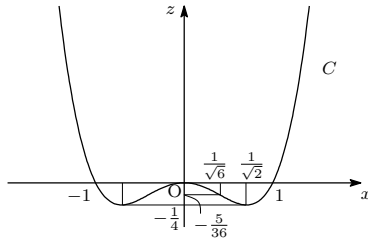


図 1

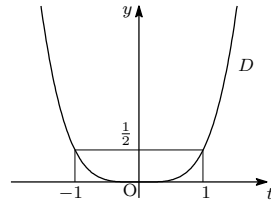


図 2

(3) (1) より  $f(x, y)$  の極値の候補は  $f(0, 0), f(1, -1), f(-1, 1)$  の 3 つある.  $f(0, 0)$  は (2) の切り口  $C$  の概形では極大値となるが, 切り口  $D$  の概形では極小値となっており, このことから  $f(0, 0)$  は極値ではない事が分かる. 一方,

$$\Delta(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} = (12x^2 - 2)(12y^2 - 2) - 2 \cdot 2$$

と置くと  $\Delta(\pm 1, \mp 1) = (12 - 2)(12 - 2) - 2^2 = 10^2 - 2^2 > 0$  となり, また  $f_{xx}(\pm 1, \mp 1) = 12 - 2 > 0$  である事より他の 2 つは極小値となる事が分かる.

以上まとめて,  $f(x, y)$  は 極小値  $f(1, -1) = f(-1, 1) = -2$  を持つ. □

【備考】 極値問題では  $\Delta(x_0, y_0) = 0$  となる場合が問題であり, このとき  $f(x_0, y_0)$  が極値かどうか, 標準的な手続きだけでは判断できず, 個別の方法で調べなければならない (=系統的に調べる方法がない).

上の問題も  $(x, y) = (0, 0)$  がその場合に当たる. この問題では  $f(x, y)$  の  $(x, y) = (0, 0)$  の近傍での挙動を調べるために幾つかの断面図を比較させている. 方向別に挙動が変化し, 結果として極値を持たない, というような場合はその由を説明しなければならないが, 文章で説明するのは面倒な事があり, そんな場合は上の問題のように断面図を描いてあげばよい (一見に如かず). □

**p.215** 【練習問題 4】 次の 2 変数関数  $f(x, y)$  の領域  $D$  上での極値を求めよ.

$$f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right\}$$

(H21 九大数理学府)

【解答】  $f(x, y)$  の偏微分は

$$f_x(x, y) = \cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y)$$

$$f_y(x, y) = \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y).$$

$$\begin{aligned} f_x = f_y = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin y(\cos x \sin(x+y) + \sin x \cos(x+y)) = \sin y \sin(2x+y) = 0 \\ \sin x(\cos y \sin(x+y) + \sin y \cos(x+y)) = \sin x \sin(x+2y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sin y = 0 & \text{または} & \sin x = \sin(2x+y) = 0 \\ \sin y = \sin(x+2y) = 0 & \text{または} & \sin(2x+y) = \sin(x+2y) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$D$  の範囲に注意すれば最右辺の前半 3 式より

$$\begin{aligned} \sin x = \sin y = 0 &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0), \\ \sin x = \sin(2x+y) = 0 &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0), \\ \sin y = \sin(x+2y) = 0 &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0). \end{aligned}$$

$\sin(2x+y) = \sin(x+2y) = 0$  のとき,  $2x+y = m\pi$ ,  $x+2y = n\pi$  ( $m, n \in \mathbb{Z}$ ) と表される.

$$\begin{cases} 2x+y = m\pi \\ x+2y = n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = (m-n)\pi \\ x+y = \frac{(m+n)\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2m-n}{3}\pi \\ y = \frac{(2n-m)}{3}\pi \end{cases}$$

$-\frac{\pi}{2} < \frac{2m-n}{3}\pi < \frac{\pi}{2}$  かつ  $-\frac{\pi}{2} < \frac{2n-m}{3}\pi < \frac{\pi}{2}$  だから整数の組  $(m, n)$  は  $-3 < 4m-2n < 3$  かつ  $-3 < 4n-2m < 3$  ... (\*) を満たす. ここで  $m \leq -2$  だとすると

$$2n-2m < 3+2m \leq -1 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{2} \leq -\frac{3}{2}-m < 2n-2m$$

だから (\*) を満たす  $(m, n)$  は存在しない.  $m \geq 2$  のときも

$$2m-2n < 3-2m \leq -1 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{2} \leq -\frac{3}{2}+m < 2m-2n$$

だから (\*) を満たす  $(m, n)$  は存在しない.

$$m = -1 \text{ のとき } -\frac{7}{2} < n < -\frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad -\frac{5}{4} < n < \frac{1}{4} \quad \therefore -\frac{5}{4} < n < -\frac{1}{2}$$

$$m = 1 \text{ のとき } \frac{1}{2} < n < \frac{7}{2} \quad \text{かつ} \quad -\frac{1}{4} < n < \frac{5}{4} \quad \therefore \frac{1}{2} < n < \frac{5}{4}$$

だから  $(m, n) = (-1, -1), (1, 1)$  は (\*) を満たす. また  $m = 0$  ならば  $-3 < 2n < 3$  かつ  $-3 < 4n < 3$  より  $n = 0$ , 即ち  $(m, n) = (0, 0)$  となる.

以上の考察より  $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0), (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}), (-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$  となる.

- (i)  $x = 0$  のとき  $f(0, y) = 0$ ,  $y = 0$  のとき  $f(x, 0) = 0$  と各軸上で定数関数となる事から  $f(0, 0)$  は極値ではない事が分かる.  
 (ii)  $s = x - \frac{\pi}{3}$ ,  $t = y - \frac{\pi}{3}$  と置き,  $s, t$  に関する 2 次の無限小を  $o(2)$  と記す.

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}s - \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + o(2), & \sin y &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + o(2), \\ \sin(x+y) &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}(s+t) - \frac{\sqrt{3}}{4}(s+t)^2 + o(2), \\ \therefore f(x, y) &= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4}\{s^2 + t^2 + (s+t)^2\} + o(2) \end{aligned}$$

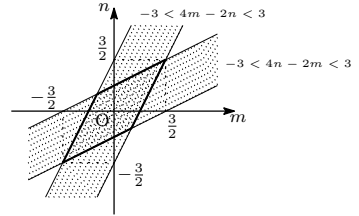
この形より  $s = t = 0$  のとき, 従って  $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$  が極大値となる事が分かる.

- (iii)  $s = x + \frac{\pi}{3}$ ,  $t = y + \frac{\pi}{3}$  と置き,  $s, t$  に関する 2 次の無限小を  $o(2)$  と記す.

$$\begin{aligned} \sin x &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}s + \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + o(2), & \sin y &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + o(2), \\ \sin(x+y) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}(s+t) + \frac{\sqrt{3}}{4}(s+t)^2 + o(2), \\ \therefore f(x, y) &= -\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4}\{s^2 + t^2 + (s+t)^2\} + o(2) \end{aligned}$$

この形より  $s = t = 0$  のとき, 従って  $f(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$  が極小値となる事が分かる.

以上まとめて  $f(x, y)$  は  $x = y = \frac{\pi}{3}$  のとき極大値  $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ,  $x = y = -\frac{\pi}{3}$  のとき極小値  $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$  をとる. □



【備考】 この問題が厄介なのは判別式が利用できない事である。

(実際

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -\sin x \sin y \sin(x+y) + 2 \cos x \sin y \cos(x+y) - \sin x \sin y \sin(x+y) \\ &= -2 \sin y (\sin x \sin(x+y) + \cos x \cos(x+y)) = -2 \sin y \cos y = -\sin 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = \cos x \cos y \sin(x+y) + \cos x \sin y \cos(x+y) + \sin x \cos y \cos(x+y) - \sin x \sin y \sin(x+y) \\ &= \cos(x+y) \sin(x+y) + \sin(x+y) \cos(x+y) = \sin(2x+2y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yy}(x, y) &= -\sin x \sin y \sin(x+y) + 2 \sin x \cos y \cos(x+y) - \sin x \sin y \sin(x+y) \\ &= -2 \sin x (\sin y \sin(x+y) + \cos y \cos(x+y)) = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x \end{aligned}$$

より判別式は  $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \sin 2x \sin 2y - \sin^2(2x+2y)$  となるから、これより  $\Delta(0, 0) = \Delta(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \Delta(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}) = 0$  が分かる。□

**p.219** 【練習問題 5】  $D = \{(x, y) \mid x^2 - 2x + 2y^2 \leq 0\}$  における  $f(x, y) = xy$  の最大値を求めなさい。

(H20 東京農工大工学府)

【解答】  $g(x, y) = x^2 - 2x + 2y^2$  とする。変数  $\lambda$  を導入して  $F = f - \lambda g$  とする。 $(a, b) \in D$  で  $f$  が極値だとすれば次を満たす  $\mu$  が存在する：

$$\begin{aligned} F_x(a, b) &= b - 2\mu(a-1) = 0, & F_y(a, b) &= a - 4\mu b = 0 \\ F_\lambda(a, b) &= -(a^2 - 2a + 2b^2) \geq 0, & \mu F_\lambda(a, b) &= -\mu(a^2 - 2a + 2b^2) = 0, & \mu &\geq 0. \end{aligned}$$

最初の 2 式より  $a = 4\mu b$ ,  $(1 - 8\mu^2)b = 2\mu$ .  $8\mu^2 = 1$  だとすると  $2\mu = 0$  となり矛盾するので、 $8\mu^2 \neq 1$ ,  $a = \frac{8\mu^2}{8\mu^2 - 1}$ ,  $b = \frac{2\mu}{8\mu^2 - 1}$  となる。

$\mu = 0$  のとき  $a = b = 0$ , 従って  $f(a, b) = 0$ .  $\mu > 0$  のとき  $a^2 - 2a + 2b^2 = 0$ ,  $(a-1)^2 + 2b^2 = 1$  より

$$\left(\frac{8\mu^2}{8\mu^2 - 1} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{2\mu}{8\mu^2 - 1}\right)^2 = 1, \quad \mu = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

このとき  $f(a, b) = ab = \frac{3\sqrt{6}}{8}$ . 従って  $D$  上での  $f(x, y)$  の最大値は  $f(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}) = \frac{3\sqrt{6}}{8}$ . □

【備考】 連続微分可能な 2 変数関数  $f, g$  が与えられるとする。定義域  $D = \{(x, y) : g(x, y) \leq 0\}$  内の点  $(a, b)$  で最大値をとり、かつ  $(g_x(a, b), g_y(a, b)) \neq (0, 0)$  が成り立つとする。このとき変数  $\lambda$  を導入して

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

と置けば、ある  $\mu$  に対し次が成立：

$$\begin{aligned} F_x(a, b, \mu) &= f_x(a, b) - \mu g_x(a, b) = 0, & F_y(a, b, \mu) &= f_y(a, b) - \mu g_y(a, b) = 0, \\ F_\lambda(a, b, \lambda) &= -g(a, b) \geq 0, & \mu F_\lambda(a, b, \lambda) &= -\mu g(a, b) = 0, & \mu &\geq 0. \end{aligned}$$

この条件を **Karush-Kuhn-Tucker** 条件という。不等式制約条件を持つ極値問題はこの条件を手掛かりに解いていく。□

**p.219** 【練習問題 6】  $a > 0, b > 0, c > 0$  を定数とする。 $x > 0, y > 0, z > 0$  が  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  を満たしながら変化するとき、 $x^a y^b z^c$  の最大値を求めよ。

(H23 東北大情報科学研究科)

【解答】  $L = x^a y^b z^c - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$  とする.

$$L_x = ax^{a-1}y^b z^c - 2\lambda x = 0, \quad L_y = bx^a y^{b-1} z^c - 2\lambda y = 0,$$

$$L_z = cx^a y^b z^{c-1} - 2\lambda z = 0, \quad L_\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0.$$

第 1~3 式より

$$ax^a y^b z^c = 2\lambda x^2, \quad bx^a y^b z^c = 2\lambda y^2, \quad cx^a y^b z^c = 2\lambda z^2.$$

辺々を加えて  $(a+b+c)x^a y^b z^c = 2\lambda$  となる. これと再び第 1~3 式, 及び  $x, y, z > 0$  より

$$x = \sqrt{\frac{a}{a+b+c}}, \quad y = \sqrt{\frac{b}{a+b+c}}, \quad z = \sqrt{\frac{c}{a+b+c}}.$$

これを座標とする点を  $(x_0, y_0, z_0)$  とするとき,  $f(x_0, y_0, z_0) = \frac{a^{\frac{a}{2}} b^{\frac{b}{2}} c^{\frac{c}{2}}}{(a+b+c)^{\frac{a+b+c}{2}}}$  が極値の候補となる.

$f(x, y, z)$  を  $D = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0, x, y, z \geq 0\}$  という範囲で考える.  $D$  は有界閉集合で  $f$  はこの上で連続だから,  $f$  は  $D$  上で最大値, 最小値に達する.  $xyz = 0$  ならば  $f(x, y, z) = 0$  であり, かつ  $D$  全体で  $f(x, y, z) \geq 0$  だから,  $0$  が最小値になる事が分かる. 一方, 極値の候補は  $f(x_0, y_0, z_0) > 0$  のみなので,  $f(x_0, y_0, z_0)$  が最大値となる.  $\square$