第 5 章

p.189

〔**練習問題 1**〕 $a>0$ とする．関数 f を閉区間 $[0,a]$ 上で連続な関数とするとき，累次積分

$$\int_0^a \sqrt{a-t}\left(\int_0^t \sqrt{t-s}f(s)ds\right)dt$$

と常に等しいのはどれか.

1. $\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^a (a-s)f(s)ds$　　2. $\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\int_0^a (a-s)f(s)ds$　　3. $\dfrac{\pi}{16}\displaystyle\int_0^a (a-s)f(s)ds$

4. $\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\int_0^a (a-s)^2f(s)ds$　　5. $\dfrac{\pi}{8}\displaystyle\int_0^a (a-s)^2f(s)ds$

(H22 年度 公務員試験上級択一理工)

【**解答**】 与式を I と置く．積分の順序変更により

$$I=\int_0^a \sqrt{a-t}\left(\int_0^t \sqrt{t-s}f(s)ds\right)dt=\int_0^a\left(\int_s^a\sqrt{(a-t)(t-s)}dt\right)f(s)ds.$$

ここで $J=\displaystyle\int_s^a\sqrt{(a-t)(t-s)}dt$ と置く．$t-s=u$，$b=a-s$ と置けば

$$J=\int_0^{a-s}\sqrt{(a-s-u)u}du=\int_0^b\sqrt{(b-u)u}du=\int_0^b\sqrt{\frac{b^2}{4}-\left(\frac{b}{2}-u\right)^2}du$$

更に $v=u-\frac{b}{2}$ と置けば

$$\begin{aligned}J&=\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\sqrt{\frac{b^2}{4}-v^2}dv=2\int_0^{\frac{b}{2}}\sqrt{\frac{b^2}{4}-v^2}dv=2\left[v\sqrt{\frac{b^2}{4}-v^2}\right]_0^{\frac{b}{2}}+2\int_0^{\frac{b}{2}}\frac{v^2}{\sqrt{\frac{b^2}{4}-v^2}}dv\\&=2\cdot\frac{b^2}{4}\int_0^{\frac{b}{2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{4}-v^2}}dv-2\int_0^{\frac{b}{2}}\sqrt{\frac{b^2}{4}-v^2}\,dv=2\cdot\frac{b^2}{4}\left[\sin^{-1}\frac{v}{\frac{b}{2}}\right]_0^{\frac{b}{2}}-J\end{aligned}$$

$$\therefore\quad J=\frac{b^2}{4}\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{8}(a-s)^2,\qquad\therefore\quad I=\frac{\pi}{8}\int_0^a(a-s)^2f(s)ds\quad(5.)$$

□

p.194

〔**練習問題 2**〕 次の積分の値を I と置く.

$$\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^4+x^2y^2+y^4)}dxdy$$

次の問に答えよ.

(1) 変数変換 $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ によって上の積分を $(0,\infty)\times[-\pi,\pi]$ 上の積分で表せ.

(2) ガンマ関数 $\Gamma(s)$ $(s>0)$ と第一種完全楕円関数 $K(k)$ $(0\le k<1)$ の値を用いて I を表せ．ここで

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt,\qquad K(k)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}dt$$

である.

(H17 年度 大阪府大工学系研究科 電気・情報系専攻)

【解答】　(1)　被積分関数の指数を極座標を用いて表すと

$$
\begin{aligned}
x^4+x^2y^2+y^4 &= r^4\cos^4\theta+r^4\cos^2\theta\sin^2\theta+r^4\sin^4\theta \\
&= r^4\{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-\cos^2\theta\sin^2\theta\} = r^4\left\{1^2-\frac{(2\cos\theta\sin\theta)^2}{4}\right\} = r^4\left(1-\frac{\sin^2 2\theta}{4}\right)
\end{aligned}
$$

となるから，極座標に対する変数変換公式より

$$
I=\iint_{(0,\infty)\times[-\pi,\pi]}\exp\left(-r^4\left(1-\frac{\sin^2 2\theta}{4}\right)\right)|r|drd\theta=\underline{\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_0^\infty r\exp\left(-r^4\left(1-\frac{\sin^2 2\theta}{4}\right)\right)dr\right\}d\theta}
$$

(2)　$-\pi\leq\theta\leq\pi$ を固定する．この θ に対し $\varphi=1-\frac{\sin^2 2\theta}{4}$ と置く．このとき $\frac{3}{4}\leq\varphi\leq 1$，特に $\varphi>0$ であり，$t=r^4\varphi$ と置換すれば $dt=4\varphi r^3dr$，$\frac{dt}{4\sqrt{\varphi t}}=rdr$ より

$$
\int_0^\infty re^{-r^4\varphi}dr=\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{4\sqrt{\varphi t}}=\frac{1}{4\sqrt{\varphi}}\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{4\sqrt{\varphi}}\Gamma(1/2)
$$

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\Gamma(1/2)}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sin^2 2\theta}{4}}}d\theta=\frac{\Gamma(1/2)}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sin^2 2\theta}{4}}}d\theta \\
&= \frac{\Gamma(1/2)}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sin^2 2\theta}{4}}}d\theta=\Gamma(1/2)\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sin^2 2\theta}{4}}}d\theta \\
&= \Gamma(1/2)\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 2\theta}{4}}}d\theta=2\Gamma(1/2)\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 2\theta}{4}}}d\theta
\end{aligned}
$$

ここで $t=\cos 2\theta$ とすると $dt=-2\cos 2\theta d\theta$，$d\theta=-\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}dt$ となるので

$$
I=2\Gamma(1/2)\int_1^0\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\right)dt=\Gamma(1/2)\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2t^2\right)}}=\underline{\Gamma(1/2)K(1/2)}
$$

□

〔備考〕　※　$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ (p.121 の解説参照) である事から $I=\sqrt{\pi}K(1/2)$ と表される．略解ではこちらを採用している．
□