

第 4 章

〔練習問題 1〕 次の関数の 2 階偏導関数を求めよ。

$$(1) z = e^{2x+3y}, \quad (2) z = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad (3) z = \sin^{-1} \frac{y}{x}, \quad (4) z = x^y y^x,$$

【解答】 (1) $z_x = 2z, z_y = 3z, z_{xx} = 4z, z_{xy} = z_{yx} = 6z, z_{yy} = 9z.$

$$(2) z_x = \frac{1}{1+(y/x)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad z_y = \frac{1}{1+(y/x)^2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$z_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad z_{xy} = z_{yx} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad z_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

(3) $z_x = \frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2\sqrt{x^2-y^2}}$ だから $x > 0$ のとき, $z_x = -\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$, $x < 0$ のとき, $z_x = \frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$ となる. 同様に $z_y = \frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-y^2}}$ だから $x > 0$ のとき, $z_y = -\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $x < 0$ のとき, $z_y = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$ となる. 更に $x > 0$ のとき,

$$z_{xx} = -y \frac{\sqrt{x^2-y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}}}{(x\sqrt{x^2-y^2})^2} = -\frac{y(2x^2-y^2)}{x^2(\sqrt{x^2-y^2})^3},$$

$$z_{xy} = z_{yx} = -\frac{1}{x} \frac{\sqrt{x^2-y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}}{(\sqrt{x^2-y^2})^2} = -\frac{x}{(\sqrt{x^2-y^2})^3},$$

$$z_{yy} = -\frac{\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}}{(\sqrt{x^2-y^2})^2} = \frac{y}{(\sqrt{x^2-y^2})^3}.$$

同様の計算より $x < 0$ のときは $z_{xx} = \frac{y(2x^2-y^2)}{x^2(\sqrt{x^2-y^2})^3}$, $z_{xy} = z_{yx} = \frac{x}{(\sqrt{x^2-y^2})^3}$, $z_{yy} = -\frac{y}{(\sqrt{x^2-y^2})^3}.$

(4) $\ln z = y \ln x + x \ln y, \frac{z_x}{z} = (y \ln x + x \ln y)_x = \frac{y}{x} + \ln y, \frac{z_y}{z} = \ln x + \frac{x}{y}.$ これと x, y に関する式の対称性より

$$z_{xx} = z_x \left(\frac{y}{x} + \ln y\right) + z \left(\frac{y}{x} + \ln y\right)_x = z \left\{ \left(\frac{y}{x} + \ln y\right)^2 - \frac{y}{x^2} \right\}, \quad z_{yy} = z \left\{ (\ln x + \frac{x}{y})^2 - \frac{x}{y^2} \right\},$$

$$z_{xy} = z_{yx} = z_y \left(\frac{y}{x} + \ln y\right) + z \left(\frac{y}{x} + \ln y\right)_y = z \left\{ \left(\frac{y}{x} + \ln y\right) (\ln x + \frac{x}{y}) + \frac{x+y}{xy} \right\},$$

□

〔練習問題 2〕 曲面 Q が次の式で表される:

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

この曲面 Q と各座標軸との交点を通る平面 P がある. 平面 P に平行な Q の接平面を考え, 接平面の式および接点の座標を求めよ.

(H20 東大情報理工学研究所 改題)

〔練習問題 1〕 $\phi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ ($x^2 + y^2 \neq 0$), $w(x, y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ とするとき, $w(1, 2)$ の値はいくらか.

(H23 国家公務員上級一類 1)

〔練習問題 2〕 関数 $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = r^\beta$ が $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$ を満たすように定数 β の値を定めよ. ただし $r =$

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

(H24 早大基幹・創造・先進理工学部編入学試験)

〔演習問題〕 \mathbb{R}^2 上の C^2 級関数 $f(u, v)$ に対し,

$$g(x, y) = f(x + y, xy)$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) g_x, g_y, g_{xx} を f の偏導関数を用いて表せ.

(2) $u^2 > 4v$ のとき, f_u, f_v を g の偏導関数を用いて表せ.

(3) $u^2 > 4v$ のとき, f_{vv} を g の偏導関数を用いて表せ.

(H22 年度 埼玉大理工学研究科)

p.154

【練習問題 8】 2変数関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

について次の問に答えよ.

(1) 偏微分係数 $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ を求めよ.

(2) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ が成立するかどうか調べよ.

(H18 埼玉大理工学研究科)

【解答】 (1) 偏微分係数の定義に従って計算する.

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 - 0^3}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0^3 - k^3}{0^2 + k^2} - 0}{k} = \frac{-1}{1} = -1$$

(2) (1) の結果より $\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - 0 - x + y = \frac{xy(x - y)}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$ について (x, y) を直線 $y = -x$ に沿って原点に近づけると

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x(-x)(x - (-x))}{(x^2 + (-x)^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{-2x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 0} 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

従って従って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ としても 0 にはならない. □

【備考】 $(x, y) \neq (0, 0)$ とする. より一般に $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r > 0$) とすれば

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy(x - y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \cos \theta \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta)$$

となる. 上の解答は $\theta = -\pi/4$ の場合であり, 例えば $\theta = \pi/3$ とすると

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3 - \sqrt{3}}{8}$$

となり, 近づく方向によって値が変わる事が分かる.

一般に全微分可能ならば常に偏微分可能だが, その逆は成立しない. 本問は逆に対する反例である. 全微分可能性の定義の確認の為, 定義自体を出題する事も多い. □

p.154

【練習問題 9】 関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

で定める. 次の問い (1) ~ (3) に答えよ.

- (1) x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ を求めよ。
 (2) 偏導関数 $f_x(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で不連続であることを示せ。
 (3) $f(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で全微分可能であることを示せ。
 (H25 金沢大理工学域編入)

【解答】 (1) $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき

$$f_x(x, y) = \frac{y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(x, y) = (0, 0) \text{ のとき } f(h, 0) = 0 \text{ より } f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

(2) $y = x > 0$ とする。このとき $f_x(x, x) = x \sin \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}x}$ 。 $x \rightarrow 0+0$ とするとき第 2 項は振動し続けるので $f_x(x, x)$ の極限は存在しない。故に $f_x(x, y)$ は原点に於いて不連続である。

(3) $f(x, y)$ は x, y に関して対称だから、(1) の計算に於いて x と y を入れ替えて計算する事により、 $f_y(0, 0) = 0$ となる。
 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と置けば

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)(x - 0) - f_y(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \\ &= \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \cos \theta \sin \theta \times r \sin \frac{1}{r} \right| \leq |\cos \theta \sin \theta| |r| \end{aligned}$$

より $r \rightarrow 0$ とすれば右辺は 0 となり、従って $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で全微分可能である事が分かる。 \square

【備考】 一般に f が C^1 級ならば U 上の各点で f は全微分可能であるが、この問題は全微分可能だが C^1 級ではないという例を与えている。【基本問題 8】の事例と一般論を併せれば、関数の微分可能性について『偏微分可能 \Leftarrow 全微分可能 \Leftarrow C^1 級』は成立するが逆方向は何れも成り立たないことになる。 \square

p.154 【練習問題 10】 関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{e^x - e^y - x + y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

で定める。次の問いに答えよ。

- (1) x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ を求めよ。
 (2) $f_{xy}(0, 0), f_{yx}(0, 0)$ をそれぞれ求めよ。
 (H22 金沢大理工学域編入)

【解答】 (1) $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= y \frac{e^x - e^y - x + y}{x^2 + y^2} + xy \frac{(e^x - 1)(x^2 + y^2) - (e^x - e^y - x + y)2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} (e^x - e^y - x + y) + \frac{xy}{x^2 + y^2} (e^x - 1) \\ &= \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} (e^x - e^y - x + y) + \frac{xy}{x^2 + y^2} (e^x - 1) \end{aligned}$$

$$(x, y) = (0, 0) \text{ のとき } f(h, 0) = 0 \text{ より } f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

(2) (1) と同様の計算より

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} (e^x - e^y - x + y) - \frac{xy}{x^2 + y^2} (e^y - 1) & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

となる。次に $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ を計算すると

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k^2}{(k^2)^2} (1 - e^k + k) \\ &= - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k^2} \left(\frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \dots \right) = -\frac{1}{2} \\ f_{yx}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{(h^2)^2} (e^h - 1 - h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left(\frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

【備考】 通常微積分の教科書で出会う関数の殆どは C^2 級、即ち 2 階偏導関数が全て連続になっているので、偏微分を行う順序を気にせず計算してしまうのだが、上の問題のように順序によって結果が異なるという例もある。多変数関数の扱いは 1 変数の場合よりも慎重にならなければいけないという注意喚起の反例である。

□

p.157 【練習問題 11】 $f(x,y) = e^{2x+3y}$ に対して x,y の 2 次多項式 $g(x,y)$ で

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - g(x,y)}{x^2 + y^2} = 0$$

をみたすものを求めよ。(名古屋大多元数理科学研究科)

【解答】 e^x のテイラー展開より

$$e^{2x+3y} = 1 + (2x+3y) + \frac{(2x+3y)^2}{2!} + (2x+3y)^3 h(x,y) \quad h(x,y) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(2x+3y)^{k-3}}{k!}$$

と置けば $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y) = \frac{1}{3!}$ だから、極座標を使って

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(2x+3y)^3 h(x,y)}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r(2 \cos \theta + 3 \sin \theta)^3 \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y) = 0$$

そこで $g(x,y) = 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy + \frac{9}{2}y^2$ と置けば

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - g(x,y)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(2x+3y)^3 h(x,y)}{x^2 + y^2} = 0$$

となる。

□

p.160 【練習問題 12】 2 変数関数 $f = f(t,s)$ は \mathbb{R}^2 上で定義された C^1 関数とする。 $g(t) = \int_0^t f(t,s) ds$ とおくと

$$g'(t) = f(t,t) + \int_0^t f_t(t,s) ds$$

となることを示せ。

【解答】 s に関する原始関数を $G(t,s) = \int_0^s f(t,s) ds$ とすれば $g(t) = G(t,t)$ となる。 s に関し微積分の基本定理を適用すれば $G_s(t,s) = f(t,s)$ 。一方、 t については $G_t(t,s) = \int_0^s f_t(t,s) ds$ となる。これらと合成関数に対する連鎖律より

$$g'(t) = \frac{dt}{dt} \frac{\partial G}{\partial s}(t,t) + \frac{dt}{dt} \frac{\partial G}{\partial t} = f(t,t) + \int_0^t f_t(t,s) ds.$$

□