

第 3 章

p.82 【練習問題 1】 以下の不定積分を計算せよ。  $a > 0, A \neq 0$  はそれぞれ定数とする。

$$(i) \int \frac{dx}{x^2+a^2} \quad (ii) \int \frac{dx}{x^2-a^2} \quad (iii) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(iv) \int \frac{dx}{x^2+A} \quad (v) \int \sqrt{a^2-x^2} dx \quad (vi) \int \sqrt{x^2+Ax} dx$$

【解答】 (i)  $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}(x/a).$

(ii)  $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} (\log|x-a| - \log|x+a|) = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$

(iii)  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \sin^{-1}(x/a).$

(iv)  $t = x + \sqrt{x^2+A}$  と置く

$$\frac{dt}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{\sqrt{x^2+A} + x}{\sqrt{x^2+A}}, \quad \frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}.$$

従って  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| = \log|x + \sqrt{x^2+A}|.$

(v)  $I = \int \sqrt{a^2-x^2} dx$  と置く. (iii) の結果より

$$I = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{x \cdot -x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2 \sin^{-1}(x/a).$$

よって  $I = \frac{1}{2} (x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \sin^{-1}(x/a)).$

(vi)  $I = \int \sqrt{x^2+Ax} dx$  と置く. (iv) の結果より

$$I = x\sqrt{x^2+A} - \int \frac{x \cdot -x}{\sqrt{x^2+A}} dx$$

$$= x\sqrt{x^2+A} - \int \frac{x^2+A}{\sqrt{x^2+A}} dx + \int \frac{A}{\sqrt{x^2+A}} dx = x\sqrt{x^2+A} - I + A \log|x + \sqrt{x^2+A}|.$$

よって  $I = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2+A} + A \log|x + \sqrt{x^2+A}|).$  □

p.83 【練習問題 2】 以下の不定積分を計算せよ。ただし  $a, b$  は  $a^2 - 4b < 0$  となる定数とする。

$$(i) \int \frac{dx}{x^2+ax+b} \quad (ii) \int (\tan^6 x + \sin^4 x) dx \quad (iii) \int \tanh 2x dx$$

【解答】 (i)  $\int \frac{dx}{x^2+ax+b} = \int \frac{d(x+\frac{a}{2})}{(x+\frac{a}{2})^2 + (\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{4b-a^2}} \tan^{-1} \left( \frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}} \right).$

(ii)  $t = \tan x$  と置く.  $dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = (\tan^2 x + 1) dx$  より  $\int (\tan^6 x + \sin^4 x) dx = \int t^4 dt = \frac{1}{5} t^5 = \frac{1}{5} \tan^5 x.$

(iii)  $\int \tanh 2x dx = \int \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(\cosh 2x)'}{\cosh 2x} dx = \frac{1}{2} \log \cosh 2x.$  □

p.83 【練習問題 3】  $n$  を整数とすると、次の漸化式を証明せよ。

- (i)  $I_n = \int \sin^n x dx$  のとき,  $I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$  ( $n \neq 0$ )  
(ii)  $I_n = \int \cos^n x dx$  のとき,  $I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$  ( $n \neq 0$ )  
(iii)  $I_n = \int \tan^n x dx$  のとき,  $I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}$  ( $n \neq 1$ )  
(iv)  $I_n = \int x^n e^{ax} dx$  のとき,  $I_n = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} I_{n-1}$  ( $a \neq 0$ )  
(v)  $I_n = \int x^\alpha (\log x)^n dx$  のとき,  $I_n = -\frac{x^{\alpha+1} (\log x)^n}{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1} I_{n-1}$  ( $\alpha \neq -1$ )  
(vi)  $I_n = \int (\sin^{-1} x)^n dx$  のとき,  
 $I_n = x(\sin^{-1} x)^n + n\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1} x)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$  ( $n = 1, 2, \dots$ )

【解答】 (i) 部分積分より

$$\begin{aligned} I_n &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n). \\ \therefore nI_n &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2}, \quad I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \end{aligned}$$

(ii) 部分積分より

$$\begin{aligned} I_n &= \cos^{n-1} x \sin x + \int (n-1) \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)(I_{n-2} - I_n). \\ \therefore nI_n &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)I_{n-2}, \quad I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \end{aligned}$$

(iii) 部分積分より

$$\begin{aligned} I_{n-2} + I_n &= \int \tan^{n-2} x (1 + \tan^2 x) dx = \int \tan^{n-2} x \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \tan^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \tan^{n-3} x \frac{1}{\cos^2 x} \tan x dx = \tan^{n-1} x \tan x - (n-2)(I_{n-2} + I_n). \\ \therefore (n-1)(I_{n-2} + I_n) &= \tan^{n-1} x, \quad I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}. \end{aligned}$$

(iv) 部分積分より  $I_n = x^n \frac{e^{ax}}{a} - \int nx^{n-1} \frac{e^{ax}}{a} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} I_{n-1}$ .

(v) (iv) に於いて  $t = e^x$  と置くと  $x = \log t$ ,  $dx = \frac{dt}{t}$  より

$$I_n = \int x^n e^{ax} dx = \int (\log t)^n t^{a-1} dt, \quad \frac{x^n e^{ax}}{a} = \frac{(\log t)^n t^a}{a}$$

だから,  $\alpha = a + 1$  と置けば (v) の漸化式を得る.

(vi)  $t = \sin^{-1} x$  と置くと  $I_n = \int t^n \cos t dt$ . 部分積分より

$$I_n = \frac{t^{n+1}}{n+1} \cos t + \frac{1}{n+1} \int t^{n+1} \sin t dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \cos t + \frac{1}{n+1} \frac{t^{n+2}}{n+2} \sin t - \frac{1}{(n+1)(n+2)} I_{n+2}$$

$n+2$  を  $n$  と置き換えれば  $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$  だから

$$I_n = t^n \sin t + nt^{n-1} \cos t - n(n-1)I_{n-2} = x(\sin^{-1} x)^n + n\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1} x)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}.$$

□

p.93 【練習問題 4】 次の不定積分を求めることを考える。

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$$

以下の問いに答えよ。

- (1)  $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$  とし,  $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$  を  $t$  に関する積分として表せ。
- (2) (1) で求めた  $t$  に関する被積分関数を部分分数に展開せよ。
- (3) 不定積分  $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$  を求めよ。

(H16 名大情報科学研究科 メディア科学専攻)

【解答】 (1)  $1-t^2 = \frac{2}{x+1}$ ,  $x+1 = \frac{2}{1-t^2}$  より

$$dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt, \quad \therefore \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int t \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt = \int \frac{4t^2}{(1-t^2)^2} dt.$$

(2) 分母の形より  $\frac{4t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1-t)^2} + \frac{D}{(1+t)^2}$  という形に部分分数展開される。通分して分子を比較、更に両辺を微分すれば

$$\begin{aligned} A(1-t)(1+t)^2 + B(1-t)^2(1+t) + C(1+t)^2 + D(1-t)^2 &= 4t^2, \\ A\{-1+(1+t)^2 + 2(1-t)(1+t)\} + B\{-(1+t)^2 + 2(1-t)(1+t)\} + 2C(1+t) - 2D(1-t) &= 8t. \end{aligned}$$

両辺に  $t=1, -1$  を代入すれば  $A=B=-1$ ,  $C=D=1$  となる事が分かる。

$$\therefore \frac{4t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{-1}{1-t} - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2}.$$

(3)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx &= \int \frac{4t^2}{(1-t^2)^2} dt = -\int \frac{dt}{1-t} - \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{(1-t)^2} + \int \frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= \log|1-t| - \log|1+t| + \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} = \log\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \frac{2t}{1-t^2}. \end{aligned}$$

$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$  とすれば

$$\begin{aligned} \frac{1-t}{1+t} &= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2}{(x+1) - (x-1)} = x - \sqrt{x^2-1}, \\ \frac{2t}{1-t^2} &= \frac{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = \frac{2(x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{(x+1) - (x-1)} = \sqrt{x^2-1}. \end{aligned}$$

従って  $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \log|x - \sqrt{x^2-1}| + \sqrt{x^2-1}$ . □

p.114 【練習問題 5】 次の問いに答えよ。

- (1) 区間  $-1 \leq x \leq 1$  で定義された関数列  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$  及び  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$  が直交関係式

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2m+1}\delta_{mn}$$

を満たす事を示せ。ただし  $\delta_{mn} = 1$  ( $m = n$ ),  $0$  ( $m \neq n$ ) とする。

- (2)  $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a > 0$ ) が  $m, n \leq 3$  に対し全問の直交関係式を満たすように係数  $a, b, c, d$  を求めよ。

(3) 関数列  $P_0(x), \dots, P_3(x)$  を用いて  $y = e^x$  の近似を考える. 誤差  $\varepsilon(x)$  を

$$\varepsilon(x) = e^x - \sum_{n=0}^3 A_n P_n(x)$$

で定義する.  $\int_{-1}^1 P_n(x)\varepsilon(x)dx = 0$  を満たすように係数  $A_n$  を定めるとき,  $A_2$  を求めよ.

(東北大工学研究科機械・知能系)

【解答】 (1)  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$  と置く. 偶奇性に注意すると

$$\langle P_0, P_0 \rangle = \int_{-1}^1 dx = 2, \quad \langle P_1, P_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad \langle P_2, P_2 \rangle = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (9x^4 - 6x^2 + 1)dx = \frac{2}{5},$$

$$\langle P_0, P_1 \rangle = \int_{-1}^1 x dx = 0, \quad \langle P_0, P_2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (3x^2 - 1)dx = 1 - 1 = 0, \quad \langle P_1, P_2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (3x^3 - x)dx = 0.$$

以上より直交関係式が確かめられた.

$$(2) \langle P_0, P_3 \rangle = \frac{2}{3}b + 2d = 0, \quad \langle P_1, P_3 \rangle = \frac{2}{5}b + \frac{2}{3}d = 0,$$

$$\langle P_2, P_3 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (3x^2 - 1)(ax^3 + bx^2 + cx + d)dx = b \int_0^1 (3x^4 - x^2)dx + d \int_0^1 (3x^2 - 1)dx = \frac{4}{15}b$$

より  $b = d = 0, c = -\frac{3}{5}a$ , 即ち  $P_3(x) = a(x^3 - \frac{3}{5}x)$  となる. 更に

$$\langle P_3, P_3 \rangle = a^2 \int_{-1}^1 (x^6 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{9}{25}x^2)dx = 2a^2(\frac{1}{7} - \frac{6}{25} + \frac{3}{25}) = a^2 \frac{8}{7 \cdot 25} = \frac{2}{7}$$

より  $a^2 = \frac{25}{4}, a = \frac{5}{2}$ . 従って  $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ .

(3)  $\langle 1, e^x \rangle = e - e^{-1}, \langle x, e^x \rangle = 2e^{-1}, \langle x^2, e^x \rangle = e - 5e^{-1}$  及び  $\langle x^3, e^x \rangle = -2e + 16e^{-1}$  となる事に注意する.

$$\langle \varepsilon, P_2 \rangle = \frac{3}{2} \langle e^x, x^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle e^x, 1 \rangle - \frac{2}{5} A_2 = \frac{3e - 15e^{-1} - (e - e^{-1})}{2} - \frac{2}{5} A_2 = 0, \quad \therefore A_2 = \frac{5}{2}(e - 7e^{-1}).$$

□

p.132 【練習問題 6】 広義積分

$$I(p, q) = \int_0^\infty x^p \sin x^q dx, \quad p \in \mathbb{R}, q > 0$$

について, 次の問いに答えよ.

(1)  $I(p, q)$  が絶対収束するような  $p, q$  の範囲を求めよ.

(2)  $I(p, q)$  が条件収束するような  $p, q$  の範囲を求めよ.

(H16 阪大基礎工学研究科 システム創成専攻)

【解答】  $t = x^q, s = \frac{q-p-1}{q}$  と置けば

$$I(p, q) = \frac{1}{q} \int_0^\infty t^{\frac{p-q+1}{q}} \sin t dt. = \frac{1}{q} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^s} dt$$

(1)  $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{t^s} dt, J_\infty = \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{|\sin t|}{t^s} dt$  と置く.  $J_\infty$  について  $s > 1$  ならば収束. 一方.  $s \leq 1$  のとき,

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^s} dt \underset{t=n\pi+\tau}{=} \int_0^\pi \frac{\sin \tau}{(n\pi + \tau)^s} d\tau \geq \frac{1}{(n+1)^s \pi^s} \int_0^\pi \sin \tau d\tau \geq \frac{2}{\pi^s (n+1)} \geq \frac{2}{\pi^s} \int_{n+1}^{n+2} \frac{d\tau}{\tau}$$

$$\therefore J_\infty \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{|\sin t|}{t^s} + \frac{2}{\pi^s} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n+1}^{n+2} \frac{d\tau}{\tau} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{|\sin t|}{t^s} + \frac{2}{\pi^s} \int_2^{\infty} \frac{d\tau}{\tau}$$

従って  $J_\infty$  は発散する。

次に  $J_0$  を考える。  $[0, \frac{\pi}{2}]$  で  $0 \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1$  だから

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{t^{s-1}} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t^{s-1}}$$

より  $s-1 < 1$  ならば収束する。一方、  $\frac{\sin t}{t}$  は  $[0, \frac{\pi}{2}]$  で単調減少だから

$$J_0 \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{t^{s-1}} dt \geq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{t^{s-1}}$$

だから  $s-1 \geq 1$  ならば発散する。以上より  $I(p, q)$  が絶対収束する  $p, q$  の範囲は

$$1 < s < 2, \quad 1 < \frac{q-p-1}{q} < 2, \quad \therefore -q-1 < p < -1.$$

(2) (1) の  $J_0$  の計算より  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t^s} dx$  は  $s < 2$  ならば収束し、  $s \geq 2$  ならば発散する。  $I_\infty = \int_2^{\infty} \frac{\sin t}{t^s} dt$  と置く。  $0 < s$  のとき  $\frac{\pi}{2} \leq p < q$  に対し

$$\left| \int_p^q \frac{\sin t}{t^s} dt \right| = \left| -\frac{\cos q}{q^s} + \frac{\cos p}{p^s} + s \int_p^q \frac{\cos t}{t^{s+1}} dt \right| \leq \frac{1}{p^s} + \frac{1}{q^s} + s \int_p^q \frac{dt}{t^{s+1}} = \frac{2}{p^s} \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty)$$

だから Cauchy の判定法より  $I_\infty$  は収束する。一方、  $s \geq 0$  のとき、  $\frac{\pi}{2} \leq q$  に対し  $\int_{\frac{\pi}{2}}^q t^{-s} \sin t dt$  は  $q$  に関し発散振動、特に収束しない。以上より  $I(p, q)$  が収束する  $p, q$  の範囲は

$$0 < s < 2, \quad 0 < \frac{q-p-1}{q} < 2, \quad \therefore -q-1 < p < q-1.$$

□

**p.132 【練習問題 7】** 以下の設問に答えよ。

(1) 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  が発散することを示せ。

(2) 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$  について、収束値を求めよ。さらに絶対収束しないことを示せ。

(H21 阪大基礎工学研究科 数理・計算科学)

【解答】 (1)  $2^i < k \leq 2^{i+1}$  となる  $k$  は  $2^i$  個あり、かつ  $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^{i+1}}$  となるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

より  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  は発散する。

(2) 正整数  $N = 1, 2, \dots$  に対し

$$\sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right\} = 1 + \frac{(-1)^{N+1}}{N+1}$$

だから,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = 1$ . 一方, (1) より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty,$$

従って  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$  は絶対収束しない.

□