第 2 章

p.47 〔**練習問題 1**〕 $f(x)=\log(1+x^2)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(a) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とあらわすとき，$n=0,1,2,3,4$ について $f^{(n)}(0)$ をそれぞれ求めよ．

(b) $f(x)$ を x の 4 次式で近似せよ．

(H25 筑波大システム情報工学研究科コンピュータサイエンス専攻, 抜粋)

【解答】 Maclaurin 展開の x^n の係数が $f^{(n)}(0)/n!$ である事と公式 $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$ より

$$\log(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\cdots\ =x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\ (x\to 0).$$

従って 4 次近似は $\underline{\log(1+x^2)\ \approx\ x^2-\frac{x^4}{2}}$ であり，微分係数は $\underline{f^{(2)}(0)=2!\times 1=2}$, $\underline{f^{(4)}(0)=4!\times(-\frac{1}{2})=-12}$, $\underline{f^{(0)}(0)=f^{(1)}(0)=f^{(3)}(0)=0}$ となる． □

※ 4 次までなのでゴリゴリ微分してもいいんだけど，有理式の微分だからねぇ・・.

p.47 〔**練習問題 2**〕 $f(x)=\sin^{-1}x$ について次の問いに答えよ．

(1) $F(x)=(1-x^2)f''(x)-xf'(x)$ を計算せよ．

(2) 関数 $F(x)$ の n 次導関数を $f(x)$ の高階導関数を用いて表せ．

(3) 関数 $g(x)=\sin^{-1}3x$ のマクローリン展開を求め，その収束半径を述べよ．

(H25 名工大工学研究科)

【解答】 (1) $y=f(x)$ とする．$\sin y=x$ の両辺を微分して

$$y'\cos y=1,\qquad y''\cos y-(y')^2\sin y=0,\qquad y''\cos^3 y=(y'\cos y)^2\sin y=\sin y$$

より $(1-x^2)y''=y''\cos^2 y=\frac{\sin y}{\cos y}$, $xy'=\frac{\sin y}{\cos y}$．従って $\underline{F(x)=0}$.

(2) Leibniz の法則より

$$((1-x^2)y'')^{(n)}={}_nC_{n-2}(-2)y^{(n)}+{}_nC_{n-1}(-2x)y^{(n+1)}+{}_nC_n(1-x^2)y^{(n+2)},$$
$$(xy')^{(n)}={}_nC_{n-1}y^{(n)}+{}_nC_nxy^{(n+1)},$$

$$\therefore\qquad F^{(n)}(x)=(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}+nxy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}.$$

(3) 一般二項定理より $|-x^2|<1$, 即ち $|x|<1$ に対し $\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-1)^kx^{2k}$ だから, $g(0)=0$ と併せて

$$g'(x)=\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-1)^k(3x)^{2k},\qquad\therefore\quad g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\frac{(-1)^k(3x)^{2k+1}}{2k+1}$$

となる．$|3x|<1\ \Leftrightarrow\ |x|<\frac{1}{3}$ より収束半径は $\underline{\ \frac{1}{3}\ }$ となる． □

※ 一般に冪級数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$ と $\sum_{k=1}^{\infty}ka_k(x-a)^{k-1}$ と収束半径は一致する．例えば 杉浦光夫「解析入門 I」第 3 章参照.

p.56 【**練習問題 3**】 指数関数の Maclaurin 展開の公式 $e^X=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}$ を利用して $f(x)=e^x\cos(x+a)$ （a は定数） の Maclaurin 展開を求めよ．

【解答】 加法定理と Euler の公式より

$$\begin{aligned}\cos(x+a)=&\cos a\cos x-\sin a\sin x=\cos a\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+i\sin a\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\\=&\frac{\cos a+i\sin a}{2}e^{ix}+\frac{\cos a-i\sin a}{2}e^{-ix}.\end{aligned}$$

指数関数の Maclaurin 展開より

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{\cos a + i\sin a}{2} e^{(1+i)x} + \frac{\cos a - i\sin a}{2} e^{(1-i)x} \\ =& \frac{\cos a + i\sin a}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+i)^k x^k}{k!} + \frac{\cos a - i\sin a}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-i)^k x^k}{k!} \end{aligned}$$

$(1 \pm i)^k = 2^{\frac{k}{2}}(\cos\frac{k\pi}{4} \pm i\sin\frac{k\pi}{4})$ だから

$$\begin{aligned} =& \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} \{ \frac{\cos a + i\sin a}{2} (\cos\tfrac{k\pi}{4} + i\sin\tfrac{k\pi}{4}) + \frac{\cos a - i\sin a}{2} (\cos\tfrac{k\pi}{4} - i\sin\tfrac{k\pi}{4}) \} \frac{x^k}{k!} \\ =& \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} (\cos a \cos\tfrac{k\pi}{4} - \sin a \sin\tfrac{k\pi}{4}) \frac{x^k}{k!} = \underline{\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} \cos(a + \tfrac{k\pi}{4}) \frac{x^k}{k!}} . \end{aligned}$$

□

p.56 【練習問題 4】 関数 $y = xe^{\frac{x}{2}}$ の n 次導関数 $y^{(n)}(x)$ の $x = 0$ における値 $y^{(n)}(0)$ を求めなさい.
(H19 東京農工大工学府)

【解答】 公式 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ より

$$y = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}(n-1)!}.$$

これと Maclaurin 展開の x^n の係数が $f^{(n)}(0)/n!$ である事より $f^{(n)}(0) = n!\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} = \underline{\frac{n}{2^{n-1}}}$.

(別解) $y' = \frac{x+2}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $y'' = \frac{x+4}{4}e^{\frac{x}{2}}$, $y''' = \frac{x+6}{8}e^{\frac{x}{2}}, \ldots$ より n 階導関数は $y^{(n)} = \frac{x+2n}{2^n}e^{\frac{x}{2}}$ となる. 実際, $n = 0$ のときは自明であり, n のときに正しいとすると

$$y^{(n+1)} = (y^{(n)})' = \left(\frac{x+2n}{2^n} e^{\frac{x}{2}} \right)' = \frac{1}{2^n} e^{\frac{x}{2}} + \frac{x+2n}{2^{n+1}} e^{\frac{x}{2}} = \frac{x+2(n+1)}{2^{n+1}} e^{\frac{x}{2}}$$

より $n + 1$ のときにも成立. 数学的帰納法より任意の n に対し, この等式は正しい. ∴ $\underline{y^{(n)}(0) = \frac{n}{2^{n-1}}}$. □

p.65 〔練習問題 5〕 次の極限値を求めよ.

$$(1)\ \lim_{x\to+0} (\sin x)^x \qquad (2)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right) \qquad (3)\ \lim_{x\to+0} x^a \log x \quad (a > 0)$$

((1) H25 東北大工学研究科 化学・バイオ専攻 (2) (3) H20, 19 筑波大システム情報工学研究科コンピュータサイエンス専攻)

【解答】 (1) d'Hospital の定理より

$$\lim_{x\to+0} x \log\sin x = \lim_{x\to+0} \frac{\log\sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} \frac{x}{\sin x} \times x\cos x = 0$$

だから $(\sin x)^x = e^{x\log\sin x}$ と指数関数の連続性より

$$\lim_{x\to+0} (\sin x)^x = \exp(\lim_{x\to+0} x\log\sin x) = \exp 0 = \underline{1}.$$

(2) $o(x^n)$ により $x \to 0$ における n 次の無限小を表す事にする. 正弦, 余弦の Maclaurin 展開より

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right) =& \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} = \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)) - x(1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3))}{x^2(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4))} \\ =& \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) - x + \frac{1}{2!}x^3 + o(x^4))}{x^3(1 + o(x))} = \frac{\frac{1}{3} + o(x)}{1 + o(x)} = \underline{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(3) $t = -\log x$ と置くと $x \to +0$ のとき $t \to \infty$ となるから,

$$\lim_{x\to+0} x^a \log x = \lim_{x\to+0} e^{a\log x}\log x = -\lim_{t\to+\infty} te^{-at} = -\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{at}} = \underline{\ 0\ }.$$

$\square$

p.68 〔**練習問題 6**〕 b が a に比べて非常に小さい時 $(a \gg b > 0)$, $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} \approx \dfrac{a+b}{a}$ で近似できることを示しなさい.

(H23 阪大工学研究科 環境・エネルギー工学専攻)

【解答】 $x = \frac{b}{a}$ と置く. 仮定より $0 < x \ll 1$. $x \to 0$ における n 次の無限小を $o(x)$ とすれば

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} &= \frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}} = (1+x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (1+x)\{1-\binom{-\frac{1}{2}}{1}x^2+\binom{-\frac{1}{2}}{2}x^4+\cdots\} = (1+x)(1+o(x)) = 1+x+o(x).\end{aligned}$$

従って $0 < b \ll a$ のとき $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} \approx 1 + x = \dfrac{a+b}{a}$ となる. $\square$