第 1 章

p.5 〔**練習問題 1**〕 以下の関数を基本 6 種の関数の和, 積及び合成関数として分解し, 微分せよ.

$$(1)\quad y=\tan^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\qquad\qquad (2)\quad y=\sin^{-1}\tan\ln(x^2+1)$$

$$(3)\quad y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)$$

((1) H19 筑波大システム情報工学研究科)

【解答】 (1) $y=\tan^{-1}u,\ u=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ と分解する. 連鎖律より

$$\begin{aligned}y'=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}&=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{(1-x^2)'(1+x^2)-(1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}\\&=\frac{1}{1+(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}\frac{-4x}{(1+x^2)^2}=-\frac{4x}{(1+x^2)^2+(1-x^2)^2}=\underline{-\frac{2x}{1+x^4}}\,.\end{aligned}$$

(2) $y=\sin^{-1}u,\ u=\tan v,\ v=\ln w,\ w=x^2+1$ と分解する. 連鎖律より

$$y'=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\sec v\cdot\frac{1}{w}\cdot 2x=\underline{\frac{2x\sec\ln(x^2+1)}{(x^2+1)\sqrt{1-\tan^2\ln(x^2+1)}}}\,.$$

(3) $y=\ln u,\ u=\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1},\ \ y=\tan^{-1}u,\ u=\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$ と分解する. 連鎖律より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)^2}=\frac{2\sqrt{2}(1-x^2)}{x^4+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{1+(\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2})^2}\cdot\frac{\sqrt{2}(1+x^2)}{(1-x^2)^2}=\frac{\sqrt{2}(1+x^2)}{1+x^4}.$$

$$\therefore\quad (\text{与式})'=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{2\sqrt{2}(1-x^2)}{x^4+1}+\frac{\sqrt{2}(1+x^2)}{1+x^4}\right)=\underline{\frac{1}{1+x^4}}\,.$$

□

p.9 〔**練習問題 2**〕 関数 $y=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\ln|x+\sqrt{x^2+A}|\right)$ $(A\neq 0)$ を微分せよ.

【解答】 $(\sqrt{x^2+A})'=\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}$ より

$$\begin{aligned}y'=&\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+A}+x\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}+A\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}}{x+\sqrt{x^2+A}}\right)\\=&\frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+A}{\sqrt{x^2+A}}+A\frac{\sqrt{x^2+A}+x}{\sqrt{x^2+A}(x+\sqrt{x^2+A})}\right)=\frac{1}{2}\frac{2x^2+2A}{\sqrt{x^2+A}}=\underline{\sqrt{x^2+A}}\,.\end{aligned}$$

□

※ 微分の頻出問題の一つ. 逆に不定積分も頻出.

p.12 〔**練習問題 3**〕 次の関数の導関数を求めよ.

$$(1)\ y=x^{x^x}\qquad (2)\ y=x^{\sin^{-1}x}\qquad (3)\ y=(\sin x)^{\sin x}\qquad (4)\ y=\sqrt[4]{\frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}}$$

【解答】 (1) $y=x^x$ のとき，$\ln y = x\ln x$，$\frac{y'}{y}=\ln x+1$ より $y'=x^x(\ln x+1)$． $y=x^{x^x}$ のとき，$\ln y = x^x \ln x$ より，

$$\frac{y'}{y}=x^x(\ln x+1)\ln x+\frac{x^x}{x}, \qquad \therefore \quad \underline{y'=x^{x^x}\cdot x^x\left((\ln x)^2+\ln x+\tfrac{1}{x}\right)}.$$

(2) $\ln y=\sin^{-1}x\ln x$ より

$$y'=x^{\sin^{-1}x}(\sin^{-1}x\ln x)'=\underline{x^{\sin^{-1}x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^x}}+\frac{\sin^{-1}}{x}\right)}.$$

(3) $\ln y=\sin x\ln\sin x$ より

$$y'=(\sin x)^{\sin x}(\sin x\ln\sin x)'=\underline{(\sin x)^{\sin x}\cos x(\ln\sin x+1)}.$$

(4) $\ln y=\frac{1}{4}(\ln(a+x)+\ln(b+x)-\ln(a-x)+\ln(b-x))$ より

$$y'=y\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}+\frac{1}{a-x}+\frac{1}{b-x}\right)=\underline{\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}}\left(\frac{a}{a^2-x^x}+\frac{b}{b^2-x^2}\right)}.$$

□

p.15 〔**練習問題 4**〕 次の関数の n 次導関数を求めよ．

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ (2) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ (3) $y=\sin ax\cos bx$

(4) $y=\cos^3 x$ (5) $y=e^x\sin x$ (6) $y=x^3\sin x$ (7) $y=x^{n-1}e^{1/x}$

【解答】 (1) $y=\frac{1}{2}\{(x-1)^{-1}-(x+1)^{-1}\}$ より $\underline{y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{2}\left\{\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right\}}$．

(2) $c=0$ のとき，$d\neq 0$ だから $\underline{y'=\dfrac{a}{d},\ y^{(n)}=0\ \ (n\geq 2)}$． $c\neq 0$ のとき，

$$y=\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c}(cx+d)^{-1}, \qquad \therefore \quad \underline{y^{(n)}\ =\frac{(ad-bc)(-c)^{n-1}n!}{(cx+d)^{n+1}}}.$$

(3) 積和の公式より $2\sin ax\cos b=\sin(a+b)x+\sin(a-b)x$．

$$\therefore \quad \underline{y^{(n)}=\frac{1}{2}\{(a+b)^n\sin((a+b)x+n\tfrac{\pi}{2})+(a-b)^n\sin((a-b)x+n\tfrac{\pi}{2})\}}.$$

(4) $4\cos^3 x=\cos 3x+3\cos x$ より $\underline{y^{(n)}=\dfrac{1}{4}\{3^n\cos(3x+n\tfrac{\pi}{2})+3\cos(x+n\tfrac{\pi}{2})\}}$．

(5) $y'=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$,

$$y''=\sqrt{2}e^x(\sin(x+\tfrac{\pi}{4})+\cos(x+\tfrac{\pi}{4}))=(\sqrt{2})^2e^x\sin(x+2\tfrac{\pi}{4})$$

より n 階導関数は $y^{(n)}=(\sqrt{2})^n e^x\sin(x+n\frac{\pi}{4})$ となると予想される． これが成立する事を n に関する帰納法で証明する．$n=1$ のときは証明済み． $n>1$ だとして $n-1$ までの成立を仮定すると

$$\begin{aligned}y^{(n)}=(y^{(n-1)})'&=(\sqrt{2})^{n-1}(e^x\sin(x+(n-1)\tfrac{\pi}{4}))'\\&=(\sqrt{2})^{n-1}e^x(\sin(x+(n-1)\tfrac{\pi}{4})+\cos(x+(n-1)\tfrac{\pi}{4}))=(\sqrt{2})^n e^x\sin(x+n\tfrac{\pi}{4}).\end{aligned}$$

よって n のときも成立する． 以上より $\underline{y^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin(x+n\tfrac{\pi}{4})}$．

(6) $n\geq 3$ のとき，Leibniz の法則より

$$\begin{aligned}y^{(n)}=&\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(x^3)^{(k)}(\sin x)^{(n-k)}\\=&x^3\sin(x+n\tfrac{\pi}{2})+3nx^2\sin(x+(n-1)\tfrac{\pi}{2})+3n(n-1)x\sin(x+(n-2)\tfrac{\pi}{2})\\&\qquad+n(n-1)(n-2)\sin(x+(n-3)\tfrac{\pi}{2})\\=&\underline{\{x^3-3n(n-1)\}\sin(x+n\tfrac{\pi}{2})-\{3nx^2-n(n-1)(n-2)\}\cos(x+n\tfrac{\pi}{2})}.\end{aligned}$$

この等式は $n=1,2$ の場合にも成立する．

(7) $n=1,2,3$ の場合を計算する事で $y_n^{(n)}=(-1)^n x^{-(n+1)}e^{1/x}$ となると予想される．これが成立する事を n に関する帰納法で証明する．$n=1$ のときは $y=-x^{-2}e^{1/x}$ より成立．$n>1$ のとき，$n-1$ までの成立を仮定すると

$$\begin{aligned}
y_n^{(n)} =&((n-1)x^{n-2}e^{1/x}-x^{n-3}e^{1/x})^{(n-1)}=(n-1)y_{n-1}^{(n-1)}-(y_{n-2}^{(n-2)})' \\
=&(-1)^{n-1}(n-1)\frac{e^{1/x}}{x^n}-\left((-1)^{n-2}\frac{e^{1/x}}{x^{n-1}}\right)' \\
=&(-1)^{n-1}(n-1)\frac{e^{1/x}}{x^n}+(-1)^{n-2}(n-1)\frac{e^{1/x}}{x^n}+(-1)^{n-2}\frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}=(-1)^n\frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}.
\end{aligned}$$

故に n のときも成立する．従って $\underline{y^{(n)}=(-1)^n\dfrac{e^{1/x}}{x^{n+1}}}$. □

p.15 〔**練習問題 5**〕 曲線 $y=f(x)$ が極座標 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ に関して $r=r(\theta)$ で表されたとする．このとき次式が成り立つ事を証明せよ．

$$(1)\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta} \qquad\qquad (2)\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2(\frac{dr}{d\theta})^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta-r\cos\theta)^3}$$

【解答】 (1) $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\frac{d(r\sin\theta)}{d\theta}}{\frac{d(r\cos\theta)}{d\theta}}=\frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta}$$

(2) (1) の計算より

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2}=&\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\
=&\frac{1}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta}\,\frac{\frac{d}{d\theta}(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta)(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta)-\frac{d}{d\theta}(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta)(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta)}{(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta)^2}
\end{aligned}$$

分子について

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\theta}(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta)(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta) \\
=&(\frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta+2\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta)(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta) \\
=&\frac{d^2r}{d\theta^2}\frac{dr}{d\theta}\sin\theta\cos\theta+2(\frac{dr}{d\theta})^2\cos^2\theta-3r\frac{dr}{d\theta}\sin\theta\cos\theta-r\frac{d^2r}{d\theta^2}\sin^2\theta+r^2\sin^2\theta, \\
&-\frac{d}{d\theta}(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta)(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta) \\
=&-(\frac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{dr}{d\theta}\sin\theta-r\cos\theta)(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta) \\
=&-\frac{dr}{d\theta}\frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta\cos\theta+2(\frac{dr}{d\theta})^2\sin^2\theta+3r\frac{dr}{d\theta}\sin\theta\cos\theta-r\frac{d^2r}{d\theta^2}\cos^2\theta+r^2\cos^2\theta
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2(\frac{dr}{d\theta})^2-r\frac{dr}{d\theta}}{(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta)^3}$$

□

p.22 〔**練習問題 6**〕 $f(x)$ を開区間 I で定義された関数とする．以下の 3 つの設問に答えよ．

(1)　$f(x)$ は $x = a \in I$ で微分可能，すなわち

$$\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ = \ \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

であるものとする．このとき $f(x)$ が $x = a$ で連続，すなわち

$$f(a) \ = \ \lim_{x\to a-0} f(x) \ = \ \lim_{x\to a+0} f(x)$$

を満たすことを示せ.

(2)　$f(x)$ が $x = a \in I$ で連続ならば，$f(x)$ は $x = a$ で微分可能となるか，答えを裏付ける証明か反例を示せ.

(3)　$f(x)$ が $x = a \in I$ で連続ならば，$(x-a)f(x)$ は $x = a$ で微分可能となるか，答えを裏付ける証明か反例を示せ.

(H21 筑波大システム情報工学研究科)

【解答】 (1) $x = a$ に於ける微分係数を $f'(a)$ とすると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a-0} |f(x)-f(a)| &= \lim_{x\to a-0} \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| |x-a| \\ &= \lim_{x\to a-0} \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \lim_{x\to a-0} |x-a| = |f'(a)|\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

より $f(a) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ が成立．右極限についても同様.

(2) $I = [-1, 1]$，$a = 0$ とし，$f(x) = |x|$ (x の絶対値) とする．このとき $f(0) = 0$ かつ

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} (-x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x = 0$$

より $f(x)$ は $x = 0$ で連続．一方,

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-0} \frac{-x}{x} = -1, \qquad \lim_{x\to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x}{x} = 1$$

より $f(x)$ は $x = 0$ で微分できない．従って一般には連続であっても微分できない事がある.

(3) $F(x) = (x-a)f(x)$ と置く．連続であるという仮定と

$$\lim_{x\to a-0} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to a+0} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$$

より $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{F(x)-F(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}$．従って $(x-a)f(x)$ は $x = a$ で微分可能である.　□

p.23 〔練習問題 7〕 n 次元ユークリッド空間を $\mathbb{R}^n$ とするとき，次の小問 (1) から (3) に答えよ.

(1)　$\mathbb{R}^n$ の部分集合 C が凸集合であることの定義を述べよ.

(2)　関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が凸関数であることの定義を述べよ.

(3)　関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が凸関数であるとき，任意の実数 $\beta \in \mathbb{R}$ に対して次の集合

$$C = \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \beta\ \}$$

が凸集合となることを証明せよ.

(H25 東工大社会理工学研究科経営工学専攻)

【解答】 (1) C の任意の 2 点 x, y に対し　$tx + (1-t)y$　$(0 \leq t \leq 1)$ が常に C に含まれる，即ち x, y を結ぶ線分が C に含まれるとき，C を凸集合という.

(2) $\mathbb{R}^n$ の任意の 2 点 x, y に対し　$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$　$(0 \leq t \leq 1)$ が成り立つとき，f を凸関数という.

(3) x, y を C の 2 点とする．$0 \leq t \leq 1$ のとき

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq t\beta + (1-t)\beta = \beta$$

より $tx + (1-t)y \in C$．従って C は $\mathbb{R}^n$ の凸集合である.　□

p.27 〔**練習問題 8**〕　連続関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が $(x,y)\neq(0,0)$ のとき正であり，なおかつ，すべての $c>0$ と実数の組 (x,y) について

$$f(cx,cy)=cf(x,y)$$

を満たしているものとする．このとき，ある正の数 $a\leq b$ がとれて

$$a\sqrt{x^2+y^2}\leq f(x,y)\leq b\sqrt{x^2+y^2}$$

が成り立つことを示せ．　(H19 神戸大理学研究科数学専攻)

【**解答**】　有界閉区間上の連続関数は最大値，最小値を持つから連続関数 $g(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)>0\quad(0\leq\theta\leq 2\pi)$ に対し $a\leq g(\theta)\leq b$ となる正数 a,b が存在．$(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ に対し $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\quad(r>0, 0\leq\theta\leq 2\pi)$ と置けば，仮定より $f(x,y)=rg(\theta)$ だから

$$ar\leq rg(\theta)\leq br,\qquad\therefore\quad a\sqrt{x^2+y^2}\leq f(x,y)\leq b\sqrt{x^2+y^2}.$$

$(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ を固定するとき，f の連続性より

$$f(0,0)=\lim_{r\to 0+0}f(rx,ry)=\lim_{r\to 0+0}rf(x,y)=0$$

だから，$(x,y)=(0,0)$ の場合も上の不等式は成立する．　$\square$

※　本問の鍵となるのは解析学の基本的な定理 "有界閉集合上の連続関数は最大値，最小値を持つ"．有界閉集合と連続性という 2 種の根拠の記述がないと評価されない恐れがある．
※　$f(0,0)$ に対する不等式は問題の仮定より自動的に成立する訳ではないので，説明する必要がある．
※　(数学科向け) 本問は有限次元線形空間上の norm の同値性が動機となっている．位相空間，または関数解析の教科書等参照．