【問題】 X, Y を位相空間とし，直積集合 $X \times Y$ に直積位相が与えられているとする．写像 $f : X \to Y$ に対し，部分集合

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x),\ x \in X\}$$

に $X \times Y$ の相対位相を入れる．Y はコンパクトハウスドルフ空間であるとする．写像 $p_X : X \times Y \to X$ と $p_Y : X \times Y \to Y$ を $p_X(x, y) = x$ と $p_Y(x, y) = y$ でそれぞれ定める．

(1) f が連続であり X が連結であるとき，$\Gamma(f)$ も連結であることを示せ．

(2) 任意の部分集合 $A \subset Y$ に対し次の等式が成立する事を示せ．

$$f^{-1}(A) = p_X(p_Y^{-1}(A) \cap \Gamma(f)).$$

(3) p_X は閉写像であることを示せ．

(4) f が連続であるための必要十分条件は $\Gamma(f)$ が $X \times Y$ 内の閉集合であることを示せ．

(2024 東京工業大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) $F(x) = (x, f(x))$ により定義される写像 $F : X \to X \times Y$ は連続である．実際，$(x, f(x))$ の近傍 $U \times V$ (U は X，V は Y の開集合) をとる．f の連続性より $f(U') \subset V$ となる X における x の近傍 U' をとる．十分小さく取る事により $U' \subset U$ としてもよい．このとき $F(U') \subset U' \times V \subset U \times V$ だから F は x で連続．従って F は連続である．連続写像による連結部分集合の像は連結だから $\Gamma(f)$ も連結である．

(2) $x \in f^{-1}(A)$ ならば $f(x) \in A$ だから $(x, f(x)) \in p_Y^{-1}(A) \cap \Gamma(f)$，従って $x \in p_X(p_Y^{-1}(A) \cap \Gamma(f))$ である．

逆に $x \in p_X(p_Y^{-1}(A) \cap \Gamma(f))$ とする．$x = p_X(x, y)$ だとすれば $y = p_Y(x, y) \in A$ かつ $y = f(x)$ だから $f(x) \in A$，従って $x \in f^{-1}(A)$．従って等式が成立する．

(3) F を $X \times Y$ の閉集合とし，$x \in p_X(F)^c$ とする．任意の $y \in Y$ に対し $(x, y) \notin F$ だから $(x, y) \in U_y \times V_y \subset F^c$ となる開集合 $U_y \subset X, V_y \subset Y$ がとれる．$\{V_y\}_{y \in Y}$ は Y の開被覆だから Y のコンパクト性より $Y = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}$ となる有限個の点 $y_1, \ldots, y_m \in Y$ がとれる．ここで $U = \bigcap_{i=1} m U_{y_i}$ とする．U は X における x の開近傍であり，任意の $y \in Y$ に対し $y \in V_{y_i}$ となる i をとれば

$$U \times \{y\} \subset U_{y_i} \times V_{y_i} \subset F^c, \qquad \therefore \quad U \times Y \subset F^c$$

よって $U \subset p_X(F)^c$．$p_X(F)$ の任意の点は $p_X(F)^c$ の内点，従って $p_X(F)^c$ は開集合，即ち $p_X(F)$ は閉集合である．

(4) $\Gamma(f)$ が閉集合であるとする．Y の任意の閉集合 F に対し p_Y の連続性より $p_Y^{-1}(F)$ は $X \times Y$ の閉集合，従って $p_Y^{-1}(F) \cap \Gamma(f)$ も閉集合．Y のコンパクト性と (3) より p_X は閉写像だから (2) と合わせて $f^{-1}(F)$ は X の閉集合となる．任意の閉集合の逆像が再び閉集合となる事から f は連続となる．

逆に f が連続であるとする．$(x, y) \in \Gamma(f)^c$ のとき，$f(x) \neq y$ と Y がハウスドルフ空間である事から $f(x) \in V$，$y \in W$ かつ $V \cap W = \varnothing$ となる Y の開集合 V, W が存在．更に $f(U) \subset V$ となる x の開近傍 U をとる．仮に $(x', y) \in (U \times W) \cap \Gamma(f)$ だとすると $f(x') = y \in W$ かつ $f(x') \in V$ となり $V \cap W = \varnothing$ である事に反する．故に $(U \times W) \cap \Gamma(f) = \varnothing$ となり，$\Gamma(f)^c$ の任意の点は内点，従って $\Gamma(f)$ は閉集合となる． □

※ (1) は一般の位相空間 Y に対し成立．(2) は位相と無縁．(3) は Y のコンパクト性のみが必要． □

※ (1) の設定で X が連結のとき，連続写像のグラフ $\Gamma(f)$ は連結だが，一般にグラフの連結性は f の連続性を導かない．

【反例】 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \sin(1/x)$ $(x > 0)$，0 $(x \leq 0)$ で定義する．$f(x)$ は $x = 0$ で不連続だが，グラフ $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ は連結である．

実際，$\Gamma(f) = A \cup B$ ($A = \{(x, y) \in \Gamma(f) : x > 0\}$, $B = \{(x, y) \in \Gamma(f) : x \leq 0\}$) と分割すると $A \cap B = \varnothing$ であり，A, B はそれぞれ (弧状) 連結である．

仮に $\Gamma(f)$ を $\mathbb{R}^2$ の部分空間とし，$\Gamma(f) = O_1 \cup O_2$，$O_1 \cap O_2 = \varnothing$ かつ $O_i \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$ となる $\Gamma(f)$ の開集合 O_1, O_2 がとれたとする．

$$A, B \subset O_1 \cup O_2, \qquad A \cap O_1 \cap O_2,\ B \cap O_1 \cap O_2 \subset O_1 \cap O_2 = \varnothing$$

と A, B の連結性より $A \cap O_1 \neq \varnothing$ または $A \cap O_2 \neq \varnothing$ の一方のみ，かつ $B \cap O_1 \neq \varnothing$ または $B \cap O_2 \neq \varnothing$ の一方のみが成立．

- $A \cap O_1 \neq \varnothing$ かつ $B \cap O_1 \neq \varnothing$ だとすれば $O_2 = \varnothing$ となり矛盾．$A \cap O_2 \neq \varnothing$ かつ $B \cap O_2 \neq \varnothing$ の場合も同様に矛盾．
- $A \cap O_1 \neq \varnothing$ かつ $B \cap O_2 \neq \varnothing$ だとすると

$$B \cap O_1 = A \cap O_2 = \varnothing, \qquad O_1 = A \cap O_1 = A, \qquad O_2 = B \cap O_2 = B.$$

$A \cap O_2 \neq \varnothing$ かつ $B \cap O_1 \neq \varnothing$ の場合も含めて B は $\Gamma(f)$ の開集合となる．

一方，$\varepsilon > 0$ に対し $1 < n\pi\varepsilon$ となる正整数 n をとれば $(1/n\pi, 0) \in U_\varepsilon(0, 0) \cap \Gamma(f) \cap B^c$ となるから $U_\varepsilon(0, 0) \cap \Gamma(f) \subset B$ となる正数 $\varepsilon > 0$ は存在しない．即ち $(0, 0)$ は B の内点ではなく，B が $\Gamma(f)$ の開集合である事と矛盾する．

何れの場合も矛盾が生じるので上の条件を満たす開集合は O_1, O_2 は存在せず，故に $\Gamma(f)$ は連結である． □

【問題】 平面内の凸多角形全体の集合を X とし，$A, B \in X$ に対し $d(A,B) = m(A \cup B - A \cap B)$ と定義する．ただし m は面積である．

(1) d は X 上の距離関数になる事を示せ．

X に距離 d による位相を与える．

(2) 各 $A \in X$ に対して面積 $m(A)$ を与える関数 $m : X \to \mathbb{R}$ は X 上の連続関数である事を示せ．

(3) $A \in X$ のとき，$\mathit{\Delta}(A) = \{E \mid E \in X,\ E \subset A\}$ は compact でない事を示せ．

(H13 東京工業大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) $d(A,B) = d(B,A)$，及び $d(A,B) \geq 0 \quad (A, B \in X)$ は自明．

・ $d(A,B) = 0$ だとすると $m(A \cup B - A \cap B) = 0$ だから $A \cap B = A \cup B$ が成立．$A \cap B \subset A \subset A \cup B = A \cap B$ より $A = A \cap B$．同様に $B = A \cap B$ となるから $A = B$ となる．

・ $A, B, C \in X$ とすると，

$$
\begin{aligned}
d(A,C) + d(C,B) =& m(A - (A \cap C)) + m(C - (A \cap C)) + m(B - (B \cap C)) + m(C - (B \cap C)) \\
=& m(A - (B \cup C)) + m(A \cap B - A \cap B \cap C) + m(C - (A \cup B)) + m(B \cap C - A \cap B \cap C) \\
& + m(C - (A \cup B)) + m(C \cap A - A \cap B \cap C) + m(B - (C \cup A)) + m(A \cap B - A \cap B \cap C) \\
\geq& m(A - (B \cup C)) + m(B \cap C - A \cap B \cap C) + m(C \cap A - A \cap B \cap C) + m(B - (C \cup A)) \\
\geq& m(A - (B \cup C)) + m(C \cap A - A \cap B \cap C) + m(B \cap C - A \cap B \cap C) + m(B - (C \cup A)) \\
=& m(A - (A \cap B)) + m(B - (A \cap B)) = d(A,B)
\end{aligned}
$$

より $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ となる．

以上より d は X 上の距離関数となる．

(2) $m(A) = m(A - A \cap B) + m(A \cap B) \leq m(A - A \cap B) + m(B)$ より $m(A) - m(B) \leq m(A - A \cap B)$．同様に $m(B) - m(A) \leq m(B - A \cap B)$ となるから

$$|m(A) - m(B)| \leq m(A - A \cap B) + m(B - A \cap B) = d(A,B).$$

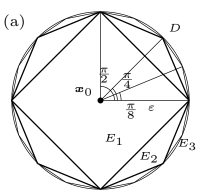
従って m は d に関して連続となる．

(3) A の内点 $\boldsymbol{x}_0$ を中心とし，A に含まれる閉円板 $D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leq \varepsilon\}$ をとる．D に内接する正四角形を E_1 とし，D に内接する正 2^n 角形 E_{n-1} が与えられたとき，E_{n-1} の頂点を頂点として含む D に内接する正 2^{n+1} 角形を E_n とする (右図 (a) は $n = 1, 2, 3$ の場合)．この操作により $\mathit{\Delta}(A)$ 内の凸多角形の増加列 $\{E_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を得る．正多角形の中心から隣接する頂点へ向かう線分の成す角を中心角と呼ぶ事にすれば，E_n の中心角は $\pi/2^n$ となるから

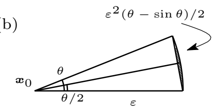
$$m(D) - m(E_n) = 2^{n+1} \times \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\pi}{2^n} - \sin\frac{\pi}{2^n}\right) = \pi\varepsilon^2\left(1 - \frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}\right)$$

(右図 (b) 参照)．特に $n \to \infty$ ならば $m(D) - m(E_n) \to 0$ となる．

(a)



(b)



仮に $\mathit{\Delta}(A)$ が comapct だとすると $\mathit{\Delta}(A)$ 内の点列 $\{E_n\}_{n=1,2,\cdots}$ は集積点を持つ．$E \in \mathit{\Delta}(A)$ をその集積点だとする．$\boldsymbol{x} \in E - D$ が存在するとき，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| > \varepsilon$ であり，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}_0$ を結ぶ線分と ∂D の交点に於ける ∂D の接線と E の境界との交点，及び $\boldsymbol{x}$ を頂点する三角形を T とするとき，

$E \subset D$ であり，E は凸多角形だから $D - E$ は内点を含み，従って $m(E) < m(D)$ となる．一方，E に収束する部分列 $\{E_{n_k}\}_{k=1,2,\cdots}$ をとると

$$
\begin{aligned}
|m(D) - m(E)| &\leq |m(D) - m(E_{n_k})| + |m(E_{n_k}) - m(E)| \\
&\leq |m(D) - m(E_{n_k})| + d(E_{n_k}, E) \to 0 \qquad (k \to \infty),
\end{aligned}
$$

従って $m(D) = m(E)$ となり矛盾．従って $\mathit{\Delta}(A)$ は compact ではない．

□

【問題】 距離空間 (X,d) に於いて点 $a \in X$ と実数 $r > 0$ に対し

$$B(a,r) = \{x \in X : d(a,x) < r\}, \qquad C(a,r) = \{x \in X : d(a,x) \leq r\}$$

と置く.

(1) $\overline{B(a,r)} \subset C(a,r)$ を証明せよ.

(2) $\overline{B(a,r)} \neq C(a,r)$ となる例を挙げよ.

(H11 東京工業大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) $x \in \overline{B(a,r)}$ に対し $x \notin C(a,r)$ だと仮定する. このとき $0 < \varepsilon < d(a,x) - r$ となる ε がとれ, 更に $y \in B(a,r) \cap B(x,\varepsilon)$ が存在する. このとき $d(x,y) < \varepsilon$, $d(a,y) < r$ より $d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,x) < r + \varepsilon$ となるが, これは ε のとり方に反する. 故に $x \in C(a,r)$ となる.

(2) X を 2 点以上含む集合, d を X 上の離散距離, 即ち $d(x,y) = 1 - \delta_{x,y}$ で与えられる距離とする. $a \in X$ を一つ固定すれば $B(a,1) = \{a\}$, $C(a,1) = X$ $(\neq \{a\})$ となる. $x \in \overline{B(a,1)}$ だとすると $y \in B(x,1/2) \cap B(a,1)$ がとれ, $d(x,y) < 1/2$ より $x = y$. 一方, $d(a,y) < 1$ より $y = a$ となるから $x = a$. 従って $\overline{B(a,1)} = \{a\}$ となり, $\overline{B(a,1)} \subsetneq C(a,r)$ となる. □