

【問題】 A を原点 $o = (0,0)$ を含む \mathbb{R}^2 の凸集合とする.

- (1) A は弧状連結であることを示せ.
- (2) 基本群 $\pi_1(A, o)$ を求めよ.

(H18 京大物理学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) A が凸集合である事より A の任意の点 p に対して $tp \in A$ ($\forall t \in [0, 1]$) となる. これは A の任意の点が原点と線分で結ばれる事, したがって A の任意の 2 点が A 内の折れ線で結ばれる事を意味し, したがって A は弧状連結となる.

(2) A 内の連続曲線 $\gamma(t)$ ($t \in [0, 1]$, $\gamma(0) = \gamma(1) = o$) に対し $\Gamma(s, t) = s\gamma(t)$ ($(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$) と置く. Γ は $[0, 1] \times [0, 1]$ から A への連続写像であり, 更に $\Gamma(0, t) = o$, $\Gamma(1, t) = \gamma(t)$ だから Γ は γ と定値写像 o を結ぶ homotopy となる. 従って A 内の o を基点とする任意の連続曲線は定値写像 o と homotopic となり, ゆえに $\pi_1(A, o)$ は単位群となる. \square