【問題】 $\mathbb{R}$ 及び $\mathbb{R}^2$ には標準的な距離位相を与えておく．連続写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を $f(a,b)=ab$ として定義する．このとき以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ は連結ではない事を示せ．

(2) $\mathbb{R}^2-\mathbb{Q}^2$ は弧状連結である事を示せ．

(3) $r\in\mathbb{R}-\{0\}$ のとき，$f^{-1}(r)$ は $\mathbb{R}-\{0\}$ と同相である事を示せ．

(H28 筑波大 数理物質科学研究科)

【解答】(1) $A=(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap(-\infty,0)$, $B=(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap(0,\infty)$ はそれぞれ $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ の $\varnothing$ ではない (例えば $-\pi\in A,\pi in B$) 開集合であり，$\mathbb{R}-\mathbb{Q}=A\cup B$, $A\cap B=\varnothing$ だから $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ は連結ではない．

(2) $p_0=(\pi,\pi)\in\mathbb{R}^2-\mathbb{Q}^2$ とする．任意の $p=(a,b)\in\mathbb{R}^2-\mathbb{Q}^2$ に対し $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ のとき，

$$\gamma_p(t)=\ (\pi+2t(a-\pi),\pi)\quad(0\le t\le 1/2),\qquad (a,\pi+(2t-1)(b-\pi))\quad(1/2\le t\le 1).$$

$b\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ のとき，

$$\gamma_p(t)=\ (\pi,\pi+2t(b-\pi))\quad(0\le t\le 1/2),\qquad (\pi+(2t-1)(a-\pi),b)\quad(1/2\le t\le 1)$$

とする．$\gamma_p$ は $\mathbb{R}^2-\mathbb{Q}^q$ 内の連続曲線 (折れ線) であり，任意の $p,q\in\mathbb{R}^2-\mathbb{Q}^2$ に対し

$$\gamma(t)=\ \gamma_p(1-2t)\quad(0\le t\le 1/2),\qquad \gamma_q(2t-1)\quad(1/2\le t\le 1)$$

は $p,q$ を結ぶ $\mathbb{R}^2-\mathbb{Q}^2$ 内の連続曲線となる．故に $\mathbb{R}^2-\mathbb{Q}^2$ は弧状連結である．

(3) $\phi:\mathbb{R}-\{0\}\to f^{-1}(r)$, $\phi(t)=(t,r/t)$ とする．$\phi$ は全単射であり，$\mathbb{R}^2$ に於ける $\phi(t)$ の近傍 $U_\varepsilon(\phi(t))$ に対し $0<\delta<\min\{|t|/2,\varepsilon|t|^2/2r\}$ となる $\delta$ をとるとき，$|s|<\delta$ となる $s$ に対し，$|s|<|t|/2$ より $t,t+s$ の正負は一致し，更に $t/(t+s)<2$ となるから，

$$\left|\frac{r}{t+s}-\frac{r}{t}\right|=\frac{r|s|}{|t||t+s|}\le\frac{r|s|}{|t|^2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

従って $\phi(t-\delta,t+\delta)\subset U_\varepsilon(\phi(t))\cap f^{-1}(r)$．故に $\phi$ は連続である．一方，$t\in\mathbb{R}-\{0\}$ 及び $\varepsilon>0$ とする．$(t,r/t)\in U_\varepsilon(\phi(t))\cap f^{-1}(r)$ に対し $|t|\le\sqrt{t^2+(r/t)^2}<\varepsilon$, 従って $\phi^{-1}(U_\varepsilon(\phi(t))\cap f^{-1}(r))\subset(t-\varepsilon,t+\varepsilon)$．故に $\phi^{-1}$ も連続．従って $\phi$ は同相である． $\square$

【問題】 $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ とする． $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ を $p(x,y)=x$ により定める． ここで $\mathbb{R}$ は Euclid 位相が与えられた実数直線である． $\mathbb{S}^1$ の位相は $\{p^{-1}(O) : O$ は $\mathbb{R}$ の開集合 $\}$ で与えらえるとする． 次を示せ．

(1) $\mathbb{S}^1$ の位相は Euclid 空間 $\mathbb{R}^2$ から定まる $\mathbb{S}^1$ 上の相対位相より粗い位相である．

(2) $\mathbb{S}^1$ は Hausdorff 空間ではない．

(3) $\mathbb{S}^1 - \{(0,1)\}$ はコンパクトである．

(4) $\mathbb{S}^1 - \{(0,1)\}$ と $\mathbb{S}^1 - \{(1,0)\}$ は同相ではない．

(H25 筑波大 数理物質科学研究科)

【解答】 上で与えた $\mathbb{S}^1$ 上の位相を $\mathfrak{O}_1$ とする． また $q \in \mathbb{R}^2$ を中心とし，半径 $r>0$ の開球を $U(q;r)$ と記す．

(1) $\mathbb{S}^1$ に $\mathbb{R}^2$ からの相対位相を $\mathfrak{O}_0$，$\mathbb{R}$ 上の通常位相を $\mathfrak{O}_{\mathbb{R}}$ とする． 任意の $q=(x,y) \in \mathbb{S}^1$ と開区間 $I=(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ に対し $p(U(q;\varepsilon)) \subset I$ となるから，$p$ は $\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_{\mathbb{R}}$ に関し連続． 特に $O \in \mathfrak{O}_{\mathbb{R}}$ に対し $p^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_0$ だから $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_0$． 一方，$\mathbb{S}^2 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y>0\}$ は $\mathfrak{O}_0$ の元であるが，$\mathfrak{O}_1$ の元ではないから $\mathfrak{O}_1 \subsetneq \mathfrak{O}_0$，即ち $\mathfrak{O}_1$ は $\mathfrak{O}_0$ より真に粗い．

(2) $\{p^{-1}(I_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ $(I_\varepsilon = (-\varepsilon,\varepsilon))$ は 2 点 N $(0,1)$，S $(0,-1)$ の基本近傍系となるが，これは常に N,S を同時に含むため，N,S を分離できない． 故に $\mathbb{S}^1$ は Hausdorff 空間ではない．

(3) $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を $\mathbb{S}^2 - \{\mathrm{N}\}$ の開被覆とする． $V_\alpha = p^{-1}(I_\alpha)$ $(I_\alpha \in \mathfrak{O}_{\mathbb{R}})$ と表される． $x \in I_\alpha$ について，$x \neq 0$ ならば $p(x, \pm\sqrt{1-x^2}) = x$，$x=0$ のとき $p(0,-1)=0$ だから $p(\mathbb{S}^1 - \{\mathrm{N}\}) = [-1,1]$． 従って任意の $\alpha$ に対し $p(p^{-1}(I_\alpha)) = I_\alpha$ となるから

$$[-1,1] = p(\mathbb{S}^2 - \{\mathrm{N}\}) = \bigcup_{\alpha \in A} p(p^{-1}(I_\alpha)) = \bigcup_{\alpha \in A} p(p^{-1}(I_\alpha)) = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha.$$

$[-1,1]$ はコンパクトだから $[-1,1] = \bigcup_{i=1}^n I_{\alpha_i}$ となる有限個の $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in A$ がとれ，これより $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1,\cdots,n}$ が元の開被覆の有限部分有限部分被覆となる．故に $\mathbb{S}^2 - \{\mathrm{N}\}$ はコンパクトである．

(4) $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $U_n = p^{-1}([-1, 1-\frac{1}{n}))$ と置けば $\{U_n\}_{n>0}$ は $\mathbb{S}^1 - \{(1,0)\}$ の開被覆となるが，これは有限な部分被覆を持たず，従って $\mathbb{S}^1 - \{(1,0)\}$ はコンパクトではない． 故に $\mathbb{S}^1 - \{\mathrm{N}\}$ と同相にならない． $\square$

【問題】 $X, Y$ を距離空間，$f : X \to Y$ を連続写像とする．$f$ のグラフ $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ を積空間 $X \times Y$ の部分空間とみなし，$P : X \times Y$ $(P(x, y) = x)$ を射影とする．このとき (1) と (2) を示せ．

(1)　$G_f$ は閉集合となる．

(2)　$P$ の $G_f$ 上への制限写像 $P|_{G_f} : G_f \to X$ は同相写像である．

(H18 筑波大 数理物質科学研究科)

【解答】 $d_X$ により $X$ 上の距離関数，$U^{d_X}(x; r)$ により中心 $x \in X$，半径 $r > 0$ の開球体を表す．$Y$ についても同様．

(1) $(x, y)$ を $X \times Y$ に於ける $G_f$ の触点とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し $f$ の連続性より $f(U^{d_X}(x; \delta)) \subset U^{d_Y}(f(x); \varepsilon/2)$ となる $0 < \delta$ が存在．更に $G_f$ の元で $(x', f(x')) \in U^{d_X}(x; \delta) \times U^{d_Y}(y; \varepsilon/2)$ となるものがとれる．このとき $f(x') \in U^{d_Y}(f(x); \varepsilon/2)$ となるから

$$d_Y(y, f(x)) \leq d_Y(y, f(x')) + d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

であり，$\varepsilon$ は任意だから $y = f(x)$，即ち $(x, y) \in G_f$ となるから，$G_f$ は閉集合である．

(2) $P|_{G_f}$ が全単射である事，及び連続性は自明なので，逆写像 $Q = (P|_{G_f})^{-1}$，即ち $Q(x) = (x, f(x))$ が連続である事を示せばよい．$x \in X$ 及び $Q(x)$ を含む開集合 $O \subset X \times Y$ をとる．更に $x$ の近傍 $U \subset X$ と $f(x)$ の近傍 $V \subset Y$ で $f(U) \times V$ かつ $(U \times V) \cap G_f \subset O \cap G_f$ が存在．

$$Q(U) \subset (U \times f(U)) \cap G_f \subset (U \times V) \cap G_f \subset O \cap G_f$$

となるから $Q$ は $x$ で連続．よって $Q$ は $X$ 上連続だから $P|_{G_f}$ は同相写像となる．　$\square$