【問題】　D と E を集合 X 上の同値関係とし，X 上の 2 項関係 $\sim$ を次で定義する．

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x_0, \ldots, x_n \in X \ \ (n \geq 1) \text{ が存在して次の 2 条件を満たす：} \\ \cdot\ \ x_0 = x,\ x_n = y \\ \cdot\ \ x_i D x_{i+1} \text{ または } x_i E x_{i+1} \end{array}$$

このとき，以下を示せ．

(1)　$\sim$ は X 上の同値関係である．

(2)　X 上の同値関係 $\equiv$ が次の条件を満たすとする．

$$x, y \in X \text{ に対して } \ xDy \text{ または } xEy \text{ ならば } x \equiv y. \qquad (*)$$

このとき $x, y \in X$ に対して $x \sim y$ ならば $x \equiv y$ が成り立つ．

(H31 筑波大学数理物質科学研究科)

【解答】　(1)　(反射律)　$x \in X$ に対し $x_0 = x_1 = x$ とする．D は同値関係だから $x_0 E x_1$．故に $x \sim x$．

(対称律)　$x, y \in X$ に対し $x_0 = x$，$x_m = y$ かつ $x_i D x_{i+1}$ または $x_i E x_{i+1}$ となる列 $x_0, \ldots, x_m$ が存在したとする．このとき $y_i = x_{m-i}$　$(i = 0, \ldots, m)$ と置けば $y_0 = x_m = y$，$y_m = x_0 = x$ であり，$x_{m-i-1} D x_{m-i}$ または $x_{m-i-1} E x_{m-i}$，従って $y_{i-1} D y_i$ または $y_{i-1} E y_i$ だから $y \sim x$ となる．

(推移律)　$x, y, z \in X$ に対し $x_0 = x$，$x_m = y$ かつ $x_i D x_{i+1}$ または $x_i E x_{i+1}$ となる列 $x_0, \ldots, x_m$ 及び $y_0 = y$，$y_n = z$ かつ $y_i D y_{i+1}$ または $y_i E y_{i+1}$ となる列 $y_0, \ldots, y_n$ が存在したとする．このとき $z_i = x_i$　$(i = 0, \ldots, m)$，y_{i-m}　$(i = m+1, \cdots, m+n)$ と置けば $z_0 = x$，$z_{m+n} = z$ であり，$x_m = y_0$ に注意すれば $z_i D z_{i+1}$ または $z_i E z_{i+1}$ が成り立ち，故に $x \sim z$ である．

以上より 2 項関係 $\sim$ は同値関係である事が確かめられた．

(2)　$x \sim y$ だとし，$x_0 = x, x_m = y$ かつ $x_i D x_{i+1}$ または $x_i E x_{i+1}$　$(i = 0, \ldots, m)$ となる列 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ をとる．仮定より $x_i \equiv x_{i+1}$　$(i = 0, \ldots, m)$ だから，推移律より $x \equiv y$ となる．　$\square$

【問題】　集合 A の部分集合の族 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と写像 $f : A \to A$ について以下を示せ．

(1)　$f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(X_n)$.

(2)　f が単射ならば $f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(X_n)$.

(3)　全ての $y \in A$ に対して $f^{-1}(\{y\})$ が有限集合であり，全て $n \in \mathbb{N}$ に対して $X_{n+1} \subset X_n$ が成り立つならば $f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(X_n)$.

(H29 筑波大学数理物質科学研究科)

【解答】　(1) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \subset X_n$ より $f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n) \subset f(X_n)$．従って $f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(X_n)$.

(2) c (1) より $f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \varnothing$，従って $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n = \varnothing$．一方，$f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n) \neq \varnothing$ の場合，$y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(X_n)$ をとるとき，各 n に対し $y = f(x_n)$ となる $x_n \in X_n$ がとれる．$f(x_n) = y = f(x_0)$ と f の単射性より $x_n = x_0 \in X_0$．故に $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$，$y = f(x_0) \in f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n)$ となる．

(3) (2) と同様に $f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \varnothing$ ならば等式が成立．一方，$f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n) \neq \varnothing$ だとし，$y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(X_n)$ をとる．$f(x_1) = y$ となる $x_1 \in X_1$ をとる．更に

$$f(x_i) = y, \qquad x_i \in X_{n_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \qquad n_1 = 1 < n_2 < \cdots < n_k$$

となる列 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ が存在したとし，更に $x_k \in X_{n_{k+1}-1}$ かつ $x_k \notin X_{n_{k+1}}$ となる n_k が存在するならば，$f(x_{k+1}) = y$ となる $x_{k+1} \in X_{n_{k+1}}$ をとる．$f^{-1}(\{y\})$ が有限である事から，この操作は n 回 (有限回) で終了．$x_n \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ だから $y = f(x_n) \in f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n)$ となる．　□

【問題】 空でない集合 X に対して，直積集合 $X \times X$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \text{ または } (x_1, x_2) = (y_2, y_1)$$

で定める．商集合 $(X \times X)/\sim$ に対し，写像 $q : X \times X \to (X \times X)/\sim$ を標準射影 (商写像) とする．また $X \times X$ の部分集合 D を

$$D = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 = x_2\}$$

で定める．

(1) $X \times X$ 上の関係 $\sim$ は確かに同値関係である事を示せ．

(2) 写像 q の D への制限 $q|_D : D \to (X \times X)/\sim$ は単射である事を示せ．

(3) 全単射 $f : q(D) \to X$ が存在する事を示せ．

(H28 筑波大学数理物質科学研究科)

【解答】 (1) (反射律) $(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ より $(x_1, x_2) \sim (x_1, x_2)$ である．

(対称律) $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ とする． $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ ならば $(y_1, y_2) = (x_1, x_2)$ だから $(y_1, y_2) \sim (x_1, x_2)$. $(x_1, x_2) = (y_2, y_1)$ ならば $(y_1, y_2) = (x_2, x_1)$ だから $(y_1, y_2) \sim (x_1, x_2)$.

(推移律) $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ かつ $(y_1, y_2) \sim (z_1, z_2)$ だとする．

$(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ $(y_1, y_2) = (z_1, z_2)$ ならば $(x_1, x_2) = (z_1, z_2)$ だから $(x_1, x_2) \sim (z_1, z_2)$.

$(x_1, x_2) = (y_2, y_1)$ $(y_1, y_2) = (z_1, z_2)$ ならば $(x_1, x_2) = (z_2, z_1)$ だから $(x_1, x_2) \sim (z_1, z_2)$.

$(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ $(y_1, y_2) = (z_2, z_1)$ ならば $(x_1, x_2) = (z_2, z_1)$ だから $(x_1, x_2) \sim (z_1, z_2)$.

$(x_1, x_2) = (y_2, y_1)$ $(y_1, y_2) = (z_2, z_1)$ ならば $(x_1, x_2) = (z_1, z_2)$ だから $(x_1, x_2) \sim (z_1, z_2)$.

従って $(x_1, x_2) \sim (z_1, z_2)$ となる．

以上より関係 $\sim$ が同値関係である事が示された．

(2) $q(x, x) = q(y, y)$ ならば $(x, x) \sim (y, y)$. 更に $\sim$ の定義より $x = y$ となるから $(x, x) = (y, y)$. よって $q|_D$ は単射である．

(3) $q(D)$ の元は $q(x, x)$ $(x \in X)$ と一意的に表される．そこで $f : q(D) \to X$ を $f(q(x, x)) := x$ と定義する．定義と (2) より全単射である事は明らかである． $\square$

【問題】　集合 S のベキ集合を $\mathcal{P}(S)$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1)　X, Y を集合 Z の部分集合とする．このとき次を示せ．

$$\mathcal{P}(X \cup Y) \subset \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \quad \Leftrightarrow \quad X \subset Y \text{ または } Y \subset X.$$

(2)　写像 $f : X \to Y$ に対して，写像 $f^* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ を $f^*(A) = f^{-1}(A)$ で定義する．ただし $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$ とする．このとき次を示せ．

$$f \text{ は単射} \quad \Leftrightarrow \quad f^* \text{ は全射}.$$

(H27 筑波大学数理物質科学研究科)

【解答】　(1) $\mathcal{P}(X \cup Y) \subset \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$ だとすると $X \cup Y \in \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$．$X \cup Y \in \mathcal{P}(X)$ ならば $X \cup Y \subset X \subset X \cup Y$ より $Y \subset X \cup Y = X$. 同様にすれば $X \cup Y \in \mathcal{P}(Y)$ ならば $X \subset X \cup Y = Y$ となる．
逆に $X \subset Y$ だとすると $X \cup Y = Y$ だから $\mathcal{P}(X \cup Y) \subset \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$．$Y \subset X$ のときも同様．

(2) f が単射だとする．任意の $A \in \mathcal{P}(X)$ に対し $A \subset f^{-1}(f(A))$ は自明．$x \in f^{-1}(f(A)) - A$ だとすると $f(x) = f(a)$ となる $a \in A$ が存在するが，f は単射だから $x = a \in A$ となり矛盾．故に $f^*(f(A)) = f^{-1}(f(A)) = A$，即ち f^* は全射となる．

逆に f^* が全射だとする．$x, y \in X$ に対し $f(x) = f(y)$ だとする．f^* は全射だから $f^*(B) = \{x\}$，$f^*(C) = \{y\}$ となる $B, C \in \mathcal{P}(Y)$ がとれる．このとき以下の★より

$$B \cap f(X) = f(f^{-1}(B)) = \{f(x)\} = \{f(y)\} = f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X)$$

$$\therefore \quad \{x\} = f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(X)) = f^{-1}(C \cap f(X)) = f^{-1}(C) = \{y\},$$

従って $x = y$，即ち f は単射である．

★　一般に任意の $D \in \mathcal{P}(Y)$ に対し

$$f^{-1}(D) = f^{-1}(D \cap f(X)), \qquad D \cap f(X) = f(f^{-1}(D))$$

が成り立つ．実際，$x \in f^{-1}(D)$ に対し $f(x) \in D \cap f(X)$ だから $x \in f^{-1}(D \cap f(X))$．$f^{-1}(D) \supset f^{-1}(D \cap f(X))$ は自明だから前者の等式が成立．後者について，$y \in D \cap f(X)$ に対し $y = f(x)$ となる $x \in X$ をとれば $x \in f^{-1}(D)$，従って $y \in f(f^{-1}(D))$．一方，$f(f^{-1}(D)) \subset f(f^{-1}(D \cap f(X))) \subset D \cap f(X)$ だから後者の等式も成立する．　$\square$

【問題】 X, Y, Z を集合，$f : X \to Y$ 及び $g : Y \to Z$ を写像とする．

$$A = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_Y"] & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

とし，写像 $p_X : A \to X$, $p_Y : A \to Y$ をそれぞれ $p_X(x, y) = x$, $p_Y(x, y) = y$ で定める．

(1) 集合 W と写像 $h : W \to X$, $k : W \to Y$ に対し $f \cdot h = g \cdot k$ が成り立つとき，W から A への写像 ϕ で $p_X \cdot \phi = h$, $p_Y \cdot \phi = k$ となるものが一意に存在する事を示せ．

(2) f が単射ならば p_Y も単射である事を示せ．

(3) f が全射ならば p_Y も全射である事を示せ．

(H26 筑波大学数理物質科学研究科, 改題)

【解答】 (1) $w \in W$ に対し $f(h(w)) = g(k(w))$ より $(h(w), k(w)) \in A$ となる．$\phi(w) = (h(w), k(w))$ と置けば W から A への写像 ϕ が定義される．$p_X \cdot \phi(w) = p_X(h(w), k(w)) = h(w)$, $p_Y \cdot \phi(w) = p_Y(h(w), k(w)) = k(w)$ となる．今，写像 $\psi : W \to A$ が条件を満たしたとすると $p_X \cdot \psi(w) = h(w)$, $p_Y \cdot \psi(w) = k(w)$ だから $\psi(w) = (h(w), k(w)) = \phi(w)$, 即ち $\psi = \phi$ となる．

(2) $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対し $p_Y(x_1, y_1) = p_Y(x_2, y_2)$ だとする．仮定より $y_1 = y_2$．更に $f(x_1) = g(y_1) = g(y_2) = f(x_2)$ と f の単射性より $x_1 = x_2$ だから $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$．故に p_Y は単射である．

(3) $y \in Y$ に対し f の全射性より $f(x) = g(y)$ となる $x \in X$ が存在．$(x, y) \in A$ かつ $p_Y(x, y) = y$ となる．故に p_Y は全射である． $\square$

【問題】　空ではない集合と写像の列

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

に於いて $g \cdot f : A \to C$ は全射，$h \cdot g : B \to D$ は単射であるとする．次を示せ．

(1)　g は全単射である．

(2)　f は全射である．

(3)　h は単射である．

(H25 筑波大学数理物質科学研究科)

【解答】　(1)　$g \cdot f$ が全射である事より，$c \in C$ に対し $g(f(a)) = c$ となる $a \in A$ がとれる．$b = f(a)$ とすれば $g(b) = c$ となる．次に $g(b) = g(b')$ だとする．$h \cdot g$ は単射だから $h(g(b)) = h(g(b'))$ より $b = b'$．故に g は全射でもある．

(2)　$b \in B$ に対し $g(b) = g(f(a))$ となる $a \in A$ をとれば，(1) より $b = f(a)$．従って f は全射である．

(3)　$c, c' \in C$ に対し $h(c) = h(c')$ だとする．$h \cdot g(g^{-1}(c)) = h(c) = h(c') = h \cdot g(g^{-1}(c'))$ より $g^{-1}(c) = g^{-1}(c')$，$c = g(g^{-1}(c)) = g(g^{-1}(c')) = c'$．従って h は単射である．$\square$

【問題】　集合 S から $\{0,1\}$ への写像全体の集合を $\{0,1\}^S$ と表す．写像 $f: A \to B$ に対して $\overline{f}: \{0,1\}^B \to \{0,1\}^A$ を $\overline{f}(g) = g \cdot f$ で定義する．このとき次を示せ．

(1)　f は単射である $\Leftrightarrow$ $\overline{f}$ は全射である．

(2)　f は全射である $\Leftrightarrow$ $\overline{f}$ は単射である．

(H22 筑波大学数理物質科学研究科)

【解答】　(1)　f が単射なとき，$h \in \{0,1\}^A$ に対し $g(b) = 0$ $(b \in B - f(A))$，$g(b) = h(a)$ $(b = f(a),\ a \in A)$ とすれば $g \in \{0,1\}^B$ であり，かつ $\overline{f}(g) = h$ となる．一方，$f(a_1) = f(a_2)$ $(a_1 \neq a_2)$ だとすれば，$h(a_1) \neq h(a_2)$ となる $h \in \{0,1\}^A$ がとれる．仮に $\overline{f}$ が全射だとすると $\overline{f}(g) = h$ となる $g \in \{0,1\}^B$ が存在するが，このとき $h(a_1) = f \cdot g(a_1) = f \cdot g(a_2) = h(a_2)$ となり矛盾する．故に $\overline{f}$ は全射ではない．

(2)　f が全射なとき，$g_1, g_2 \in \{0,1\}^B$ について $\overline{f}(g_1) = \overline{f}(g_2)$ だとする．任意の $b \in B$ に対し $b = f(a)$ となる $a \in A$ をとれば $g_1(b) = g_1(f(a)) = g_2(f(a)) = g_2(b)$．従って $g_1 = g_2$ となる．一方，$B \neq f(A)$ のとき，$\left.g_0\right|_{B-f(A)} = i$，$\left.g_0\right|_{f(A)} = 1$，$(i = 0, 1)$ とすれば $g_0 \neq g_1$ かつ $\overline{f}(g_1) = \overline{f}(g_2)$ となる．$\square$

【問題】 $f : A \to B$ を集合 A から集合 B への写像とするとき，(1) と (2) を示せ．

(1) A の部分集合 X が $X = f^{-1}(f(X))$ を満たすならば，A の任意の部分集合 Y に対して $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ が成り立つ．

(2) A の部分集合 X が，A の任意の部分集合 Y に対して $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ を満たすならば，$X = f^{-1}(f(X))$ が成り立つ．

(H18 筑波大学数理物質科学研究科)

【解答】 (1) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ は自明なので，逆の包含関係を示せばよい． $z \in f(X) \cap f(Y)$ だとする．$z = f(y)$ となる $y \in Y$ をとるとき，$y \in f^{-1}(z) \subset f^{-1}(f(X))$ と仮定より $y \in X \cap Y$． 従って $z \in f(X \cap Y)$． 故に $f(X \cap Y) \supset f(X) \cap f(Y)$ となる．

(2) $X \subset f^{-1}(f(X))$ は自明だから，逆の包含関係を示せばよい． $y \in f^{-1}(f(X))$ だとすると $f(y) \in f(X) \cap f(\{y\}) = f(X \cap \{y\})$ より $X \cap \{y\} \neq \varnothing$，即ち $y \in X$ が成立． 故に $f^{-1}(f(X)) \subset X$，$f^{-1}(f(X)) = X$ である． $\square$