【問題】 X を位相空間，Y をコンパクト位相空間とする．このとき，

(1) U を直積位相空間 $X \times Y$ の開集合としたとき，$A = \{x \in X \mid \{x\} \times Y \subset U\}$ は X の開集合である事を示せ.

(2) $\pi(x, y) = x$ で定義される射影 $\pi : X \times Y \to X$ が閉写像である事を示せ.

(H16 東北大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) $x \in A$ とする．任意の $y \in Y$ に対し $(x, y) \in U$ となるから，$V_y \times W_y \subset U$ となる x の近傍 V_y，及び y の近傍 W_y が存在する．Y は compact だから，Y の開被覆 $\{W_y\}_{y \in Y}$ の有限部分被覆 $\{W_{y_i}\}_{i=1,\cdots,n}$ が存在する．$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$ は x の近傍であり，任意の $(x', y) \in V \times Y$ について $y \in W_{y_i}$ となる y_i をとれば $(x', y) \in V \times W_{y_i} \subset V_{y_i} \times W_{y_i} \subset U$ となるから $V \times Y \subset U$，即ち $V \subset A$ となる.

(2) $X \times Y$ の部分集合 F と $x \in X$ に対し

$$x \in \pi(F)^c \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \pi(F) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \notin F \ (\forall\, y \in Y) \quad \Leftrightarrow \quad \{x\} \times Y \subset F^c$$

だから，(1) より F が閉集合ならば $\pi(F)^c$ は開集合，従って $\pi(F)$ は閉集合となる. $\square$

【問題】 (X,d) をコンパクト距離空間とし，$g: X \to X$ を連続写像とする．もし全ての $x \in X$ に対し $g(x) \neq x$ であれば，正数 ε が存在して

$$d(g(x),x) \geq \varepsilon \qquad (x \in X)$$

が成り立つことを証明せよ．

(H14 東北大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 $x \in X$，$r > 0$ に対し $U_r(x) = \{y \in X : d(y,x) < r\}$ と置く．仮定より任意の $x \in X$ に対し $d(g(x),x) > 0$ が成立．$d(g(x),x)$ に対し $0 < \varepsilon_x < \frac{d(g(x),x)}{2}$ となる ε_x をとり，g の連続性より

$$0 < \delta_x < \frac{\varepsilon_x}{2}, \qquad g(U_{\delta_x}(x)) \subset U_{\varepsilon_x}(g(x))$$

となる δ_x がとれる．$\{U_{\delta_x}(x)\}_{x \in X}$ は X の開被覆だから，X のコンパクト性より $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\delta_{x_i}}(x_i)$ となる有限個の $x_1, \cdots, x_n \in X$ が存在する．ここで

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{d(g(x_i),x_i)}{4} : \ i = 1, \cdots, n\right\}$$

となる ε をとる．任意の $x \in X$ に対し $x \in U_{\delta_{x_i}}(x_i)$ となる i がとれる．$\varepsilon_{x_i}, \delta_{x_i}$ のとり方より

$$d(g(x),g(x_i)) < \varepsilon_{x_i} < \frac{d(g(x_i),x_i)}{2}, \qquad d(x,x_i) < \delta_{x_i} < \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} < \frac{d(g(x_i),x_i)}{4}$$

が成立．三角不等式より $d(g(x_i),x_i) \leq d(g(x_i),g(x)) + d(g(x),x) + d(x,x_i)$ だから，

$$d(g(x),x) \geq d(g(x_i),x_i) - d(g(x_i),g(x)) - d(x,x_i) \geq d(g(x_i),x_i) - \frac{d(g(x_i),x_i)}{2} - \frac{d(g(x_i),x_i)}{4} = \frac{d(g(x_i),x_i)}{4} > \varepsilon$$

となり，この ε が求めるものとなる． $\square$

【問題】 n 次複素正方行列 A で $A^\dagger = A^{-1}$ をみたすものの全体を $U(n)$ と記し，$\mathbb{C}^{n^2}$ から導かれる位相を入れる．

(i) $U(n)$ はコンパクトであることを示せ．

(ii) $U(1)\times U(1)\times\cdots\times U(1)$ は弧状連結であることを示せ．

(iii) $U(n)$ は弧状連結であることを示せ．

(S55 東北大学理学研究科 数学専攻)

【解答】(i) $A=[a_{ij}]\in M_n(\mathbb{C})$ に対し

$$A\in U(n)\quad\Leftrightarrow\quad A^\dagger A=E_n\quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{n}\overline{a_{ki}}a_{kj}-\delta_{ij}=0$$

となる．最右辺の式は $U(n)$ が $M_n(\mathbb{C})$ 上の多項式関数の零点集合である事を意味し，従って $U(n)$ は $\mathbb{C}^{n^2}$ の閉集合である．また $U(n)$ は $\mathbb{C}^{n^2}$ 内の $2n-1$ 次元球面の n 個の直積：

$$(\mathbb{S}^{2n-1})^{\times n}=\left\{(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n^2}:\sum_{k=1}^{n}|a_{ki}|^2=1\ (i=1,\cdots,n)\right\}$$

に含まれるから有界となり，従って $U(n)$ は compact 集合である．

(ii) $U(1)$ は $\mathbb{C}$ の原点を中心とする単位円だから，任意の元は $e^{2\pi it}$ $(t\in[0,1])$ と表される．従って $U(1)\times\cdots\times U(1)$ の元は $z=(e^{2\pi it_1},\cdots,e^{2\pi it_n})$ $(t_i\in[0,1])$ と表される．ここで

$$c(s)=(e^{2\pi ist_1},\cdots,e^{2\pi ist_n})\qquad(s\in[0,1])$$

とすれば c は $(1,\cdots,1)$ と z を結ぶ $U(1)\times\cdots\times U(1)$ 内の道となる．よって $U(1)\times\cdots\times U(1)$ は弧状連結である．

(iii) $\mathbb{C}^n$ の標準 Hermite 形式を $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$，$\|\cdot\|$ を付随する norm とする．$A\in U(n)$ とし，ω を A の固有値，$\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n$ をその固有ベクトルとする．$A\boldsymbol{v}=\omega\boldsymbol{v}$ の両辺に $A^\dagger$ を掛ければ $\boldsymbol{v}=A^\dagger A\boldsymbol{v}=\omega A^\dagger\boldsymbol{v}$ となり，

$$|\omega|^2\|\boldsymbol{v}\|^2=\langle\omega\boldsymbol{v}\mid\omega\boldsymbol{v}\rangle=\langle A\boldsymbol{v}\mid\omega\boldsymbol{v}\rangle=\langle\boldsymbol{v}\mid\omega A^\dagger\boldsymbol{v}\rangle=\|\boldsymbol{v}\|^2$$

及び $\|\boldsymbol{v}\|\neq 0$ から $|\omega|^2=1$，よって $\omega=e^{2\pi it}\in U(1)$ $(t\in[0,1])$ と表される．A は正規行列，よって unitary 行列 P を用いて対角化可能だから

$$P^\dagger AP=\begin{bmatrix}e^{2\pi it_1}&&&\\&e^{2\pi it_2}&&\\&&\ddots&\\&&&e^{2\pi it_n}\end{bmatrix},\qquad\therefore\quad A=P\begin{bmatrix}e^{2\pi it_1}&&&\\&e^{2\pi it_2}&&\\&&\ddots&\\&&&e^{2\pi it_n}\end{bmatrix}P^\dagger$$

と表される．$U(1)\times\cdots\times U(1)$ の元を $U(n)$ の対角行列の元と同一視するとき，(ii) の曲線 c を用いれば $Pc(s)P^\dagger$ $(s\in[0,1])$ は単位行列 E_n と A を結ぶ $U(n)$ 内の道となる．よって $U(n)$ は弧状連結となる．$\square$