【問題】 (X,d) を距離空間とする．任意の $\varepsilon>0$ と $x\in X$ に対し

$$N(x,\varepsilon)=\{y\in X\mid d(x,y)<\varepsilon\},\qquad B(x,\varepsilon)=\{y\in X\mid d(x,y)\le\varepsilon\}$$

とおく．$U_n\ \ (n=1,2,\dots)$ はすべて (X,d) の稠密な開集合とする．このとき以下の問いに答えよ．

※ X の部分集合 U は，任意の $x\in X$ と $\varepsilon>0$ に対し $N(x,\varepsilon)\cap U\neq\varnothing$ をみたすとき，(X,d) で**稠密**であるという．

(1) 任意の $x_0\in X$ と $\varepsilon_0>0$ に対して

$$B(x_1,\varepsilon_1)\subset N(x_0,\varepsilon_0)\cap U_1,\qquad 0<\varepsilon_1\le\frac{\varepsilon_0}{2}$$

をみたす $x_1\in X$ と $\varepsilon_1>0$ があることを示せ．

(2) 帰納的に X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ と数列 $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，

$$B(x_n,\varepsilon_n)\subset N(x_{n-1},\varepsilon_{n-1})\cap U_n,\quad 0<\varepsilon_n\le\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}\qquad(n=1,2,\dots)$$

をみたすものをとるとき，点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列であることを示せ．

(3) (X,d) が完備であるとき，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$ は (X,d) で稠密であることを示せ．

(H24 首都大学東京 理工学研究科 数理情報科学専攻)

【解答】 (1) U_1 が稠密であることより $x_1\in N(x_0,\varepsilon_0)\cap U_1$ となる x_1 が存在する．U_1 と $N(x_0,\varepsilon_0)$ は開集合だから $N(x_0,\varepsilon_0)\cap U_1$ も開集合となり，従って x_1 はその内点となる．従って

$$B(x_1,\varepsilon_1)\subset N(x_0,\varepsilon_0)\cap U_1,\qquad 0<\varepsilon_1\le\frac{\varepsilon_0}{2}$$

となる正数 ε_1 が存在する．

(2) 数列 $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ の作り方より

$$\varepsilon_n\le\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}\le\frac{\varepsilon_{n-2}}{2^2}\le\cdots\le\frac{\varepsilon_0}{2^n}\ \to\ 0\quad(n\to\infty)$$

となり，従って任意の $\varepsilon>0$ に対し $2\varepsilon_n<\varepsilon\ (\forall n\ge N)$ となる正整数 N が存在する．この N に対し $n>m>N$ だとすると $x_k\in N(x_{k-1},\varepsilon_{k-1})$ より

$$\begin{aligned}d(x_n,x_m)&\le d(x_n,x_{n-1})+\cdots+d(x_{m+1},x_m)\\&<\varepsilon_{n-1}+\cdots+\varepsilon_m\le\frac{\varepsilon_m}{2^{n-1-m}}+\cdots+\varepsilon_m=(2-(1/2)^{n-m-1})\varepsilon_m<2\varepsilon_m<\varepsilon\end{aligned}$$

より $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列となる．

(3) 任意の $x_0\in X$ と $\varepsilon_0>0$ に対し (1) (2) の議論を用いて Cauchy 列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を構成すれば X の完備性より極限が存在する．これを y と記す．点列の作り方より任意の n に対し $x_m\in B(x_n,\varepsilon_n)\ \ (\forall m\ge n)$ が成立．$B(x_n,\varepsilon_n)$ は閉集合だから $y\in B(x_n,\varepsilon_n)$ となる．さらに $B(x_n,\varepsilon_n)\subset U_n$ だから $y\in U_n$，従って $y\in\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$ となり，$y\in B(x_1,\varepsilon_1)\subset N(x_0,\varepsilon_0)$ と併せて

$$y\in N(x_0,\varepsilon_0)\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n,\quad \text{即ち}\quad N(x_0,\varepsilon_0)\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\neq\varnothing\qquad\text{を得る．}$$

□

【問題】 $(X, d_X), (X, d_X)$, を距離空間とし，$f : X \to Y$ を写像とする．f が連続写像であることを次で定義する．

「X の任意の収束列 $\{x_n\}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ であれば $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ が成り立つ.」

f が連続写像であるための必要十分条件は Y の任意の開集合 U に対し，逆像 $f^{-1}(U)$ が X の開集合であることを示せ.

(H22 首都大理工学研究科 数学・情報専攻)

【解答】 f に対し前者が成立したとする． Y の開集合 U に対し $f^{-1}(U)$ が開集合ではないとすれば，$x \in f^{-1}(U)$ で内点ではないものが存在する． 特に任意の $n = 1, 2, \cdots$ に対し $x_n \in U_{1/n}(x) \cap (X - f^{-1}(U))$ となるものがとれる． このとき $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ であり，仮定より $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ となる．一方，$f(x) \in U$ だから $U_M(f(x)) \subset U$ となる $M > 0$ が存在し，$f(x_n) \notin U$ より $d(f(x_n), f(x)) \geq M \quad (n = 1, 2, \cdots)$ となるが，これは $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ に反する．故に $f^{-1}(U)$ の任意の点は内点となり，従って $f^{-1}(U)$ は開集合である．

f に対し後者が成立したとする． $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となる点列 $\{x_n\}$，及び $x \in X$ が与えられたとする． 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$ は開集合だから，$U_\delta(x) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$ となる $\delta > 0$ がとれる． $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ より $x_n \in U_\delta(x) \quad (n \geq N)$ となる N が存在し，このとき

$$f(x_n) \in f(U_\delta(x)) \subset f\left(f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))\right) \subset U_\varepsilon(f(x)) \qquad (n \geq N)$$

となる．従って $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ となる． □

【問題】 (X, d) を距離空間とする． X の部分集合 A に対し，A の内部 (即ち A の内点全体の集合) を A^i，A の閉包 (即ち A の触点全体の集合) を A^a とおく． このとき次の等式を証明せよ．

(1) $A^i = (A^i)^i$

(2) $A^a = (A^a)^a$

(H22 首都大理工学研究科 数学・情報専攻)

【解答】 $x \in X$，$\varepsilon > 0$ に対し $U_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$ と置く．

(1) $x \in (A^i)^i$ のとき，$U_\varepsilon(x) \subset A^i$ となる ε が存在．$x \in U_\varepsilon(x)$ だから $x \in A^i$ である．

一方，$x \in A^i$ とする． $U_\varepsilon(x) \subset A$ となる ε が存在． 任意の $y \in U_\varepsilon(x)$ に対し $0 < \varepsilon' < \varepsilon - d(x, y)$ となる ε' をとれば $z \in U_{\varepsilon'}(y)$ について

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \varepsilon' < d(x, y) + \varepsilon - d(x, y) = \varepsilon$$

より $z \in U_\varepsilon(x)$，従って $U_{\varepsilon'}(y) \subset U_\varepsilon(x) \subset A$，$U_\varepsilon(x) \subset A^i$ が成立．故に x は A^i の内点，即ち $x \in (A^i)^i$ となる．以上より $A^i = (A^i)^i$ である．

(2) $x \in A^a$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\varnothing \neq U_\varepsilon(x) \cap A \subset U_\varepsilon(x) \cap A^a$ より $x \in (A^a)^a$ である．

一方，$x \in (A^a)^a$ とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し $y \in U_\varepsilon(x) \cap A^a$ がとれる．$y \in A^a$ より $0 < \eta < \varepsilon - d(x, y)$ となる任意の $\eta > 0$ に対し $z \in U_\eta(y) \cap A$ がとれる．この z について $z \in A$ であり，かつ

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \eta + d(x, y) < \varepsilon - d(x, y) + d(x, y) = \varepsilon$$

より $z \in U_\varepsilon(x)$ だから，$U_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$ となる．従って $x \in A^a$ となる．以上より $A^a = (A^a)^a$ である． □

【問題】 以下の問いに答えよ．

(1) 位相空間 X がコンパクトであることの定義をひとつ挙げよ．

(2) ユークリッド距離から定まる位相空間 $\mathbb{R}^n$ において，部分集合 A がコンパクトであることと同値な性質を述べよ．

(3) 位相空間 X がコンパクトであるとき，任意の閉集合 F はコンパクトであることを示せ．

(4) ハウスドルフ空間 X の直積位相空間 $X \times X$ において，部分集合 $D = \{(x, x) \mid x \in X\}$ は $X \times X$ の閉集合であることを示せ．

(H20 首都大理工学研究科 数学・情報専攻)

【解答】 (1) X の任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限な部分被覆を持つとき，即ち，Λ の有限部分集合 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ で，$X = \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$ となるものが存在するとき，X はコンパクトであるという．

(別定義) X の部分集合からなる空ではない族 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が

$$\text{“ 任意有限個の } \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \Lambda \quad (n > 1) \text{ に対し } \bigcap_{i=1}^n S_{\lambda_i} \neq \varnothing \text{ が成立したとする.”}$$

という条件を満たすとき，有限交叉性を持つという． X の部分集合族 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限交叉性を持つならば，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{S}_\lambda \neq \varnothing$ ($\overline{}$ は閉包を表す) が必ず成立するとき，X をコンパクトだという．

(2) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A がコンパクトであることと A が有界閉集合である事は同値である．

(3) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を F の開被覆とする．このとき $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{X \setminus F\}$ は X の開被覆となるから，X のコンパクト性より

$$\exists\, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda \quad \text{s.t.} \quad X = \left(\bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i} \right) \cup (X \setminus F)$$

が成立．$x \in F$ は $x \notin X \setminus F$ だから，$x \in \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$ となり，$\{U_{\lambda_i}\}_{i=1}^n$ は F の開被覆となる．従って F はコンパクトである．

(4) 任意の $(x, y) \in X \times X \quad (x \neq y)$ をとる．X がハウスドルフ空間だから，$U \cap V = \varnothing$ となる x, y の開近傍 U, V が存在する．特に $U \cap V = \varnothing$ より $U \times V \subset X \times X \setminus D$ だから (x, y) は $X \times X \setminus D$ の内点となり，従って $X \times X \setminus D$ は開集合，故に D は閉集合となる． $\square$

〈雑感〉(2) ではコンパクトと同値である命題のみを記したが，本来はこれが同値である事を証明する必要がある．しかし証明の長さなどを鑑みると，今の場合は主張のみでよいのだろう．悩ましい・・・． $\square$

【問題】 $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ で各々実数，有理数, 整数全体の集合を表す． 集合 $X_{\mathbb{R}}$, $X_{\mathbb{Q}}$, X_z を次のように定義する．

$$X_{\mathbb{R}} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$
$$X_{\mathbb{Q}} = \{(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$
$$X_{\mathbb{Z}} = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

$d(x,y)=|x-y|$ を $\mathbb{R}^3$ の通常の距離関数とするとき，距離空間 $(\mathbb{R}^3, d)$ から誘導された位相に関してどれがコンパクトか？ (証明を付けよ.) 一方,

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

の場合にはどれがコンパクトか？ (証明を付けよ.)

(H17 東京都立大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 $d(x,y)=|x-y|$ のとき： $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ は $\mathbb{R}^3$ 上の連続関数だから $\mathbb{R}$ の閉集合 $\{1\}$ の逆像 $f^{-1}(\{1\}) = X_{\mathbb{R}}$ は閉集合． $X_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}^3$ の有界集合だから，Heine-Borel の定理より $X_{\mathbb{R}}$ はコンパクトとなる． また $X_{\mathbb{Z}} = \{(\pm 1,0,0),\ (0,\pm 1,0),(0,0,\pm 1)\}$ は 6 点の有限集合だから，これもコンパクトである．

一方，$X_{\mathbb{Q}}$ について考える．$\sqrt{3}=1.7320508\cdots$ に収束する有理数列

$$t_0=1,\quad t_1=1.7,\quad t_2=1.73,\quad t_3=1.732,\quad t_4=1.7320,\ \cdots$$

を取り，$\boldsymbol{x}_n = \big((1-t_n^2)/(1+t_n^2), 2t_n/(1+t_n^2), 0\big)$ $(n \geq 0)$ とする． $\boldsymbol{x}_n \in X_{\mathbb{Q}}$ であり，$\mathbb{R}^3$ に於ける極限は $\boldsymbol{x} = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ である．従って $\boldsymbol{x} \in \partial X_{\mathbb{Q}}$ となるが $\boldsymbol{x} \notin X_{\mathbb{Q}}$，即ち $X_{\mathbb{Q}} \subsetneq \partial X_{\mathbb{Q}}$ だから $X_{\mathbb{Q}}$ は閉集合ではなく，よって $X_{\mathbb{Q}}$ はコンパクトではない．

$d(x,y)$ が離散距離のとき： $X_{\mathbb{Z}}$ は 6 点からなる有限集合だからコンパクトである．一方，離散距離の定義より任意の $x \in X_{\mathbb{R}}$ に対し

$$\{y \in X_{\mathbb{R}} : d(y,x) < \varepsilon\} = \{x\} \qquad (0 < \forall\varepsilon < 1)$$

となり，$X_{\mathbb{R}}$ の任意の 1 点集合が開集合となる． $\{\{x\}\}_{x\in X_{\mathbb{R}}}$ という $X_{\mathbb{R}}$ の開被覆を考えると，$X_{\mathbb{R}}$ は無限集合だから如何なる有限部分集合も $X_{\mathbb{R}}$ の被覆にならない． 従って $X_{\mathbb{R}}$ はコンパクトではない． 同様の理由より無限集合 $X_{\mathbb{Q}}$ もコンパクトではない．

□