

【問題】 Euclid 平面 \mathbb{R}^2 の 2 点 P, Q を結ぶ線分を \overline{PQ} と表す. 2 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ について, 通常の Euclid 距離は

$$d(P, Q) = \text{線分 } \overline{PQ} \text{ の長さ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

で与えられている. さらに

$$d_B(P, Q) = \begin{cases} d(P, Q) & P, Q \text{ を通る直線が原点 } O \text{ を通る場合} \\ d(P, O) + d(O, Q) & \text{そうではない場合} \end{cases}$$

と定義する. このとき次の間に答えよ.

- (1) d_B は \mathbb{R}^2 の距離関数である事を示せ.
- (2) 距離空間 (\mathbb{R}^2, d_B) は可分ではない事を示せ.
- (3) 距離空間 (\mathbb{R}^2, d_B) と通常の Euclid 平面 (\mathbb{R}^2, d) とは同相ではない事を示せ.

(H23 静岡大学自然科学研究科)

【解答】 (1) (i) $d_B(P, Q) \geq 0$ となる事は明らか. $P = Q$ ならば P, P, O は同一直線上にあるから $d_B(P, P) = d(P, P) = 0$. 一方, $P \neq Q$ のとき, O, P, Q が同一直線上にある場合は $d_B(P, Q) = d(P, Q) > 0$. O, P, Q が同一直線上にない場合は特に $P \neq O$ かつ $Q \neq O$ だから $d_B(P, Q) = d(P, O) + d(O, Q) > 0$ となる.

(ii) $d_B(P, Q) = d_B(Q, P)$ は自明.

(iii) 3 点 P, Q, R に次の 4 通りが考えられる:

- ・ O, P, Q, R が同一直線上にある場合: $d_B(P, Q) = d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q) = d_B(P, R) + d_B(R, Q)$.
- ・ OP, OQ は平行であり, OP, OR は平行ではない場合: このとき OQ, OR も平行ではないから

$$\begin{aligned} d_B(P, Q) &= d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q) \\ &\leq d(P, O) + d(O, R) + d(R, O) + d(O, Q) = d_B(P, R) + d_B(R, Q) \end{aligned}$$

- ・ OP, OR は平行であり, OR, OQ は平行ではない場合: このとき OP, OQ も平行ではないから

$$d_B(P, Q) = d(P, O) + d(O, Q) \leq d(P, R) + d(R, O) + d(O, Q) = d_B(P, R) + d_B(R, Q)$$

OR, OQ は平行であり, OP, OR は平行ではない場合も同様.

- ・ OP, OQ, OR が互いに平行ではない場合:

$$d_B(P, Q) = d(P, O) + d(O, Q) \leq d(P, O) + d(O, Q) + 2d(O, R) = d_B(P, R) + d_B(R, Q)$$

よって全ての場合に於いて三角不等式が成立している. 故に d_B は \mathbb{R}^2 上の距離関数となる.

(2) 距離空間が可分である事と, Lindelöf 空間である事, 即ち, 任意の開被覆に対し加算個から成る部分被覆が存在する事は同値である. 今, $\theta \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots$ に対し $P_{\theta, n} = (n \cos \theta, n \sin \theta)$ と置き, 更に $\varepsilon > 0, P \in \mathbb{R}^2$ に対し $U_{B, \varepsilon}(P) = \{Q \in \mathbb{R}^2 : d_B(Q, P) < \varepsilon\}$ と置く. このとき

$$\mathfrak{M} = \{U_{B, 1}(P_{\theta, n}) : 0 \leq \theta < 2\pi, n = 0, 1, 2, \dots\}$$

と置く. $n = 0$ のときは $U_{B, 1}(O) = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, O) < 1\}$. $n > 0$ のとき,

$$d(P_{\theta, n}, O) = \sqrt{(n \cos \theta)^2 + (n \sin \theta)^2} = n$$

より $O, P_{\theta, n}, Q \in \mathbb{R}^2$ が同一直線上になければ $d(P_{\theta, n}, O) + d(O, Q) \geq n$ となるから, $Q \notin U_1(P_{\theta, n})$. 一方, $O, P_{\theta, n}, Q \in \mathbb{R}^2$ が同一直線上にあるならば Q の座標は $(t \cos \theta, t \sin \theta)$ と表され,

$$d_B(Q, P_{\theta, n}) = d(Q, P_{\theta, n}) = \sqrt{(t \cos \theta - n \cos \theta)^2 + (t \sin \theta - n \sin \theta)^2} = |t - n|$$

となるから, $U_1(P_{\theta, n}) = \{(t \cos \theta, t \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 : n-1 < t < n+1\}$ となる. 原点以外の \mathbb{R}^2 の任意の点 Q は $(r \cos \tau, r \sin \tau)$ ($r > 0, 0 \leq \tau < 2\pi$) と一意的に表されるから

$$Q \in U_1(P_{\theta, n}) \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \text{ または } n = 1, \text{ かつ } \theta = \tau & (r < 1) \\ n = [r] \text{ または } n = [r] + 1, \text{ かつ } \theta = \tau & (r > 1) \end{cases}$$

($[\cdot]$ は Gauss 記号) だから \mathfrak{M} は \mathbb{R}^2 の開被覆であり, また Q を含む近傍 $U_1(P_{\theta, n})$ は高々 2 個だから, \mathfrak{M} の任意の可算個の部分集合は \mathbb{R}^2 の開被覆にならない. 従って (\mathbb{R}^2, d_B) は Lindelöf 空間ではなく, 最初の注意より可分ではない.

(3) \mathbb{R}^2 の有理点から成る部分集合 \mathbb{Q}^2 は (\mathbb{R}^2, d) に於いて稠密だから (\mathbb{R}^2, d) は可分. これと (2) より (\mathbb{R}^2, d_B) と (\mathbb{R}^2, d) は同相ではない. \square

【問題】 (X, d) は距離空間とする. 点 $x \in X$ と $A \subset X$ に対し $d(x, A)$ は x と A の距離, 即ち $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$ とする. このとき次の事を示せ.

- (1) $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = d(x, A)$ ($x \in X$) と定義すれば, f は連続となる.
- (2) 整数 ε に対して $A_\varepsilon = \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\}$ と置く. A_ε は A を含む開集合である.
- (3) A の点から成る任意の取束点列の極限点が A に属するならば, A は閉集合である.

(H20 静岡大学自然科学研究科)

【解答】 (1) $x, y \in X$ とする. 任意の $a \in A$ に対し

$$f(x) - f(y) = d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, a) - d(y, a) \leq d(x, y) + d(y, a) - d(y, A)$$

が成立. $a \in A$ は任意だから $f(x) - f(y) \leq d(x, y)$ が成立. 同様に $f(y) - f(x) \leq d(x, y)$ が成立し, よって $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ が成立. これより f は連続である事が分かる.

(2) $a \in A$ に対し $d(a, a) = 0$ より $d(a, A) = 0$ だから $A \subset A_\varepsilon$ となる. 次に $x \in A_\varepsilon$ とする. $0 < \delta < \varepsilon - d(x, A)$ となる δ をとる. 定義より $d(x, a) < d(x, A) + \delta/2$ となる $a \in A$ が存在する. このとき $y \in U_{\delta/2}(x)$ ($= \{z \in X : d(z, x) < \delta/2\}$) に対し

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \delta/2 + d(x, a) < d(x, A) + \delta < \varepsilon$$

より $d(y, A) < d(y, a) < \varepsilon$ となるから $U_{\delta/2}(x) \subset A_\varepsilon$ となる. よって A_ε の任意の点は内点だから A_ε は開集合である.

(3) A 内の任意の取束点列の極限が A に属すと仮定する. A の閉包 \overline{A} の点 a をとるとき, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $d(x_n, a) < 1/n$ となる $x_n \in A$ がとれる. とり方より a は A 内の点列 $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ の極限だから, 仮定より $a \in A$ となる. 従って $\overline{A} = A$, 即ち A は閉集合である. □