【問題】 $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合

$$X = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n+1}^2 = 1\}$$

に $\mathbb{R}^{n+1}$ の位相から誘導される位相を導入する．このとき X の連結成分は 2 個であって，それらは共に $\mathbb{R}^n$ に同相である事を示せ．

(S55 大阪大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 $\mathbb{R}^{n+1}_{\pm x_1>0} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \pm x_1 > 0\}$ と置く． $\mathbb{R}^{n+1}_{\pm x_1>0}$ はそれぞれ $\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合であり，$\mathbb{R}^{n+1}_{x_1>0} \cap \mathbb{R}^{n+1}_{-x_1>0} = \varnothing$ となる． $X_\pm = X \cap \mathbb{R}^{n+1}_{x_1>0}$ とすれば $\boldsymbol{x} \in X$ ならば $x_1 = \pm\sqrt{x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 + 1}$ だから $X = X_+ \cup X_-$ であり，$X_+ \cap X_- = X \cap \mathbb{R}^{n+1}_{x_1>0} \cap \mathbb{R}^{n+1}_{-x_1>0} = \varnothing$ だから X_+ と X_- は非連結である．更に任意の $\boldsymbol{x} \in X_\pm$ に対し $\ell(t) = (\pm\sqrt{t^2(x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2) + 1}, tx_2, \cdots, tx_{n+1})$ $(t \in [0,1])$ とすれば ℓ は $X_\pm$ 内の連続曲線だから各 $X_\pm$ は弧状連結，従って連結となるから，$X_\pm$ は X の連結成分となる．

$X_\pm$ に対し

$$\phi_\pm : X_\pm \to \mathbb{R}^n, \quad \phi_\pm(\boldsymbol{x}) = (x_2, \cdots, x_{n+1}),$$

$$\psi_\pm : \mathbb{R}^n \to X_\pm, \quad \psi_\pm(x_2, \cdots, x_{n+1}) = (\pm\sqrt{x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 + 1}, x_2, \cdots, x_{n+1})$$

とすれば $\phi_\pm, \psi_\pm$ はそれぞれ連続であり，$\psi_\pm \cdot \phi_\pm = 1_{X_\pm}$，$\phi_\pm \cdot \psi_\pm = 1_{\mathbb{R}^n}$ より $\phi_\pm$ は位相同型射となる． □