【問題】 (X,d) を距離空間とし，$x,y\in X$ に対し

$$\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

と定める．このとき次の問いに答えよ．

(1) ρ は X 上の距離になることを示せ．

(2) 距離空間 (X,d) における開集合は距離空間 (X,ρ) における開集合であることを示せ．また (X,ρ) における開集合は (X,d) における開集合であることを示せ．

(H25 岡山大学自然科学研究科 数理物理科学専攻)

【解答】 (1) $0\leq\rho(x,y)<1$，$\rho(x,y)=\rho(y,x)$，および $\rho(x,x)=0$ である事は自明．また $\rho(x,y)=0$ ならば $d(x,y)=0$ より $x=y$ となる事も分かる．

今，$f(t)=t/(1+t)\quad(t\geq 0)$ と置けば $f'(t)=1/(1+t)^2>0$ より $f(t)$ は単調増加だから，$x,y,z\in X$ に対し $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ となる事より

$$\begin{aligned}\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leq\ \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}&=\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)}+\frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}\\&\leq\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}.\end{aligned}$$

従って三角不等式 $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(y,x)$ が成立する．以上より ρ は X 上の距離である事が示された．

(2) $x\in X$，$\varepsilon>0$ に対し $U^d(x;\varepsilon)=\{y\in X\mid d(y,x)<\varepsilon\}$，$U^\rho(x;\varepsilon)=\{y\in X\mid\rho(y,x)<\varepsilon\}$ とする．

今，O が (X,d) の開集合だとする．$O=\varnothing$ ならば O は (X,ρ) でも開集合である事は自明．$O\neq\varnothing$ だとする．O の任意の点 x は内点だから $U^d(x;\varepsilon)\subset O$ となる $\varepsilon>0$ が存在する．ε に対し $0<\delta<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ (<1) となる δ をとれば $\frac{\delta}{1-\delta}<\varepsilon$ となり，任意の $y\in U^\rho(x;\delta)$ に対し

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}<\delta,\qquad d(x,y)<\frac{\delta}{1-\delta}<\varepsilon,\qquad\therefore\ y\in U^d(x;\varepsilon).$$

即ち $U^\rho(x;\delta)\subset U^d(x;\varepsilon)\subset O$ となる．これは x が距離 ρ に関する O の内点である事を意味し，故に O は (X,ρ) の開集合となる．

逆に O が (X,ρ) の開集合だとする．$O=\varnothing$ ならば O は (X,d) でも開集合である事は自明．$O\neq\varnothing$ だとする．O の任意の点 x は内点だから $U^\rho(x;\varepsilon)\subset O$ となる $\varepsilon>0$ が存在する．任意の $y\in U^d(x;\varepsilon)$ に対し $\rho(y,x)=\frac{d(y,x)}{1+d(y,x)}\leq d(y,x)<\varepsilon$ より $y\in U^\rho(x;\varepsilon)$，即ち $U^d(x;\varepsilon)\subset U^\rho(x;\varepsilon)$ となる．これより $U^d(x;\varepsilon)\subset U^\rho(x;\varepsilon)\subset O$, 従って x は (X,d) に於いても O の内点となり，よって O は (X,d) の開集合である事が分かる．□

〈雑感〉(X,d) と (X,ρ) は位相同型，特に恒等写像 1_X が位相同型射である事が分かる．一方，この恒等写像は等距離写像ではない．位相同型射と等距離写像の違いを表す例になっている