【問題】 X, Y を位相空間とし，その直積 $X \times Y$ に於いて次の部分集合族を考える．

$$\mathcal{B} = \{ A \times B \mid A \text{ は } X \text{ の開集合，} B \text{ は } Y \text{ の開集合 } \}.$$

上の $\mathcal{B}$ を開基底とする $X \times Y$ の位相を直積位相といい，以下，$X \times Y$ に直積位相を与える．また，写像 $f : X \times Y \to X$ を $f(x, y) = x \quad (x \in X,\ y \in Y)$ で定める．以下の各命題が真か偽かを述べよ．さらに命題が真ならば命題を証明し，偽であれば命題の反例を挙げ，それが反例である事を示せ．

(1) f は連続である．
(2) G が $X \times Y$ の開集合なら $f(G)$ は X の開集合である．
(3) F が $X \times Y$ の閉集合なら $f(F)$ は X の閉集合である．

(H30 名古屋大学多元数理科学研究科)

【解答】 (1) 真な命題．
(証明) X の任意の開集合 A に対し $f^{-1}(A) = A \times Y \in \mathcal{B}$ より $f^{-1}(A)$ は開集合．従って f は連続である． ■.

(2) 真な命題．
(証明) $x \in f(G)$ とすると $f(x, y) = x$ となる $(x, y) \in G$ がとれ，さらに $(x, y) \in A \times B \subset G$ となる X, Y のそれぞれの開集合 A, B がとれる．このとき $x \in A = f(A \times B) \subset f(G)$ より, x は $f(G)$ の内点となる．よって $f(G)$ は開集合である． ■.

(3) 偽な命題．
(反例) $X = Y = \mathbb{R}$ とし，$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ とすれば，F は $\mathbb{R}^2$ の閉集合となる．F の f による像 $f(F) = \mathbb{R} - \{0\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合となる． ■. □

【問題】 (X,d) を d を距離とする距離空間とする．X の部分集合 A は次の条件をみたすとき，点列コンパクトであるという．

『A の任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ と A の点 a が存在し，

$$\lim_{j\to\infty} d(x_{n_j},a)=0$$

を満たす.』

以下の問に答えよ．

(1) A を X の点列コンパクトな部分集合とする．A は閉集合か．そうならば証明し，そうでなければ反例を挙げ，それが反例になっている事を示せ．

以下では (X,d_X)，(Y,d_Y) を距離空間とし，$f:X\to Y$ は連続とする．

(2) A を X の点列コンパクトな部分集合とするとき，A の f による像 $f(A)$ は Y の点列コンパクト集合である事を示せ．

(3) A_m $(m=1,2,\ldots)$ は X の点列コンパクトな部分集合で，$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$ を満たすとする．このとき

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} f(A_m)=f\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right)$$

を示せ．

(H29 名古屋大学多元数理科学研究科)

【解答】 $x\in X$ に於ける ε 近傍を $U_{\varepsilon}^{d}(x)=\{y\in X: d(y,x)<\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$ と記す事にする．

(1) $a\in X$ を A の触点とする．任意の正整数 n に対し $a_n\in U_{1/n}(a)\cap A$ となる a_n をとる．仮定より点列 $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ の収束部分列 $\{a_{n_j}\}_{j=1,2,\ldots}$ が存在．この極限を $a'\in A$ とする．このとき

$$d(a,a')\le d(a,a_{n_j})+d(a_{n_j},a')<\frac{1}{n_j}+d(a_{n_j},a')\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}0$$

だから $a=a'\in A$．従って A は閉集合である．

(2) $\{y_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を $f(A)$ の任意の点列とし，各 y_n に対し $f(x_n)=y_n$ となる $x_n\in A$ をとる．A は点列コンパクトだから，点列 $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ に対し A の点 a に収束する部分列 $\{x_{n_j}\}_{j=1,2,\ldots}$ が存在する．連続性より

$$\lim_{j\to\infty} y_{n_j}=\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j})=f(a)\in f(A).$$

即ち，$\{y_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は $f(A)$ の点に収束する部分列が存在し，従って $f(A)$ は点列コンパクトである．

(3) (左辺)$\supset$(右辺) は自明だから，(左辺)$\subset$(右辺) を示せばよい．$y\in$ (左辺) だとする．このとき各 m に対し $y=f(a_m)$ となる $a_m\in A_m$ が存在する．$\{a_m\}_m$ は A_1 の点列だから A_1 の点 x に収束する部分列 $\{a_{m_j}\}_j$ が存在する．$x\notin\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m$ だとすると $x\notin A_m$ となる m が存在．A_m は閉集合だから $U_{\varepsilon}^{d}(x)\cap A_m=\varnothing$ となる $\varepsilon>0$ が存在するが，これは部分列 $\{a_{m_j}\}_j$ が x に収束する事に反する．故に $x\in\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m$ となる．更に f の連続性より

$$f(x)=\lim_{j\to1} f(a_{m_j})=\lim_{j\to1} y=y\ \in\ f\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m\right).$$

故に等式が成立する． $\square$

【問題】 (X,d) を距離空間とする．以下の問に答えよ．

(1) X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して以下の不等式を示せ．

$$|d(a_m,b_m)-d(a_n,b_n)| \le d(a_m,a_n)+d(b_m,b_n).$$

(2) X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は共に Cauchy 列とする．このとき $\mathbb{R}$ の数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $c_n = d(a_n,b_n)$ と定めると，$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する事を示せ．

(3) X の Cauchy 列全体の集合を Y とする．Y に於いて関係 $\sim$ を

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n)=0$$

と定めると，$\sim$ は Y に於ける同値関係となる．この同値関係 $\sim$ による商集合 $\overline{Y}=Y/\sim$ に対して，写像 $\overline{d}:\overline{Y}\times\overline{Y}\to\mathbb{R}$ を

$$\overline{d}(\overline{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}, \overline{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}}) := \lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n)$$

と定める．このとき $\overline{d}$ は well-defined である事を示せ．

(H28 名古屋大学多元数理科学研究科)

【解答】 (1)

$$d(a_m,b_m) \le d(a_m,a_n)+d(a_n,b_m) \le d(a_m,a_n)+d(a_n,b_n)+d(b_n,b_m)$$

より $d(a_m,b_m)-d(a_n,b_n) \le d(a_m,a_n)+d(b_m,b_n)$．更に

$$d(a_n,b_n) \le d(a_n,a_m)+d(a_m,b_n) \le d(a_m,a_n)+d(a_m,b_m)+d(b_m,b_n)$$

より $d(a_n,b_n)-d(a_m,b_m) \le d(a_m,a_n)+d(b_m,b_n)$．以上より $|d(a_m,b_m)-d(a_n,b_n)| \le d(a_m,a_n)+d(b_m,b_n)$ となる．

(2) (1) の不等式より $|c_m-c_n| \le d(a_m,a_n)+d(b_m,b_n)$．仮定より $m,n\to\infty$ ならば $d(a_m,a_n), d(b_m,b_n)\to 0$ となるから $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である．

(3) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{a'_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{b'_n\}_{n=1}^{\infty}$ だとする. (1) と同様の計算により次の不等式が成立する事が分かる：

$$|d(a_n,b_n)-d(a'_n,b'_n)| \le d(a_n,a'_n)+d(b_n,b'_n).$$

これと仮定より $\lim_n d(a_n,a'_n)=\lim_n d(b_n,b'_n)=0$ となるから $\lim_n d(a_n,b_n)=\lim_n d(a'_n,b'_n)$ となり，従って $\overline{d}$ は well-defined である． □

【問題】 (X,d) を d を距離とする距離空間として，$a\in X$ と正の実数 r に対して

$$B_r(a)=\{x\in X:d(a,x)<r\}$$

と置き，これを a を中心とする半径 r の開球と呼ぶ．以下の問に答えよ．

(1) X の部分集合 U が開集合である事の定義を開球を用いて述べよ．
(2) 距離空間 (X,d) 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ が $x_\infty\in X$ に収束する事の定義を開球を用いて述べよ．

位相空間 X の部分集合 K は次の性質を満たすとき，X の中でコンパクトであるという．

「$K\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ を満たす X の任意の開集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して Λ の有限部分集合 Λ_0 で $K\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda_0}U_\lambda$ を満たすものが存在する.」

以下の問はこの定義に基づいて答えよ．

(3) $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は距離空間 (X,d) 内の点列で $x_\infty\in X$ に収束しているとする．このとき $A=\{x_n\}_{n=1,2,\cdots}\cup\{x_\infty\}$ は X の中でコンパクトか．そうならば証明し，そうでなければ反例を挙げ，それが反例になっている事を示せ．
(4) $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は距離空間 (X,d) 内の点列で $x_\infty\in X$ に収束しているとする．このとき $B=\{x_n\}_{n=1,2,\cdots}$ は X の中でコンパクトか．そうならば証明し，そうでなければ反例を挙げ，それが反例になっている事を示せ．

(H28 名古屋大学多元数理科学研究科)

【解答】 (1) 任意の $x\in U$ に対し $B_r(x)\subset U$ となる正数 $r>0$ が存在するとき，U を X の開集合という．
(2) 任意の正数 $\varepsilon>0$ に対し $x_n\in B_\varepsilon(x_\infty)$ $(n\geq n_0)$ となる正整数 n_0 が存在するとき，$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は x_∞ に収束するという．

(3) 任意の A の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．x_∞ を含む U_{λ_∞} $(\lambda_\infty\in\Lambda)$ をとれば，$x_n\in U_{\lambda_\infty}$ $(n\geq n_0)$ となる正整数 n_0 が存在する．$n<n_0$ となる各 n に対し $x_n\in U_{\lambda_n}$ となる $\lambda_n\in\Lambda$ をとり, $\Lambda_0=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_{n_0-1},\lambda_\infty\}\subset\Lambda$ とすれば Λ_0 は有限集合であり，かつ $A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda_0}U_\lambda$ となる．従って A はコンパクトである．

(4) $X=\mathbb{R}$ とし，d を絶対値とする．数列 $B=\{b_n=1/n\}_{n=2,3,\cdots}$ をとれば 0 に収束する．各 n に対し $I_n=((2n+1)/2n(n+1),(2n-1)/2n(n-1))$ と置けば $\{I_n\}_{n=2,3,\cdots}$ は $b_n\in I_n$ かつ $I_{n+1}\cap I_n=\varnothing$ となる B の開被覆となる．この開被覆の任意の真の部分集合は B の被覆にならず，特に有限な被覆は存在しない．故に B はコンパクトではない． $\square$

【問題】 $\mathbb{R}^n$ に於いて点 $a \in \mathbb{R}^n$ の近傍で定義された実数値関数 f が a で連続であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$x \in \mathbb{R}^n,\ \|x-a\| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(a)| < \varepsilon \tag{A}$$

となる $\delta = \delta(a) > 0$ が存在する事をいう． ただし $\|\cdot\|$ は Euclid norm， 即ち $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ と定義されるものである．以下の問に答えよ．

(1) (A) が成り立つとき，$\|y-a\| < \delta/2$ を満たす任意の $y \in \mathbb{R}^n$ について

$$x \in \mathbb{R}^n,\ \|x-y\| < \delta/2 \ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)| < 2\varepsilon$$

が成立する事を示せ．

(2) 有界閉集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ の近傍で定義された実数値関数 f が全ての $a \in K$ に於いて連続であるとする． このとき f は K 上で一様連続である事，即ち任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$x, y \in K,\ \|x-y\| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

となる $\delta > 0$ が存在する事を示せ．

(H26 名古屋大学多元数理科学研究科)

【解答】 (1) $\|x-y\| < \delta/2$ のとき，$\|x-a\| \le \|x-y\| + \|y-a\| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$ より $|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f(a)| + |f(a)-f(y)| < 2\varepsilon$.

(2) 一様連続ではないとすると或る $\varepsilon > 0$ に対し，1 以上の各整数 k について $\|x_k - y_k\| < 1/k$ かつ $|f(x_k)-f(y_k)| \ge \varepsilon$ となる $x_k, y_k \in K$ がとれる． K はコンパクトだから $\{x_k\}_{k=1,2,\ldots}$ の収束部分列 $\{x_{k_l}\}_{l=1,2,\ldots}$ が存在する． この極限を $x \in K$ とすれば

$$\|y_{k_l} - x\| \le \|y_{k_l} - x_{k_l}\| + \|x_{k_l} - x\| < \frac{1}{k_l} + \|x_{k_l} - x\| \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

となるが，f の連続性より

$$0 = |f(x)-f(x)| = \lim_{l\to\infty} |f(y_{k_l}) - f(x)| \ge \varepsilon > 0$$

となり矛盾する． 故に f は一様連続である． □

【問題】 実直線 $\mathbb{R}$ 上の有界な実数値連続関数全体のなす集合を X とする．X 上の距離 d を

$$d(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \qquad (f, g \in X)$$

によって定義する．

(1) 距離空間 (X, d) における Cauchy 列 $\{f_n\}$ に対して

$$\sup_{n\geq 1} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| < \infty$$

であることを示せ．

(2) 関数列 $\{f_n\}$ $(f_n \in X)$ と $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f に対して

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

が成り立つならば，$f \in X$ である事を示せ．

(3) 距離空間 (X, d) は完備であることを示せ．

(H13 名古屋大学多元数理科学研究科)

【解答】 (1) $\{f_n\}$ が Cauchy 列だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $d(f_m, f_n) < \varepsilon$ $(n, m \geq N)$ となる N が存在する．この N を固定するとき

$$\max_{n\leq N} d(f_n, 0) + \varepsilon < M$$

となる $M > 0$ をとれば，

$$d(f_n, 0) < M \quad (n \leq N), \qquad d(f_n, 0) \leq d(f_n, f_N) + d(f_N, 0) < M \quad (N \leq n)$$

即ち $\sup_{n\geq 1} d(f_n, 0) < \infty$ となる．

(2) 仮定より任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ $(n \geq N)$ となる N が存在する． f_N は有界だから $f_N(x) < M$ となる $0 < M$ が存在し，このとき

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_N(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_N(x)| < \varepsilon + M \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

従って $f(x)$ は有界である．次に任意の $x \in \mathbb{R}$ をとる．$|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon/3$ $(|x - y| < \delta)$ となる $\delta > 0$ が存在する．$|x - y| < \delta$ とき

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

となるから f は x に於いて連続．x は任意だから f は $\mathbb{R}$ で連続となる．以上より $f \in X$ となる．

(3) $\{f_n\}$ を X の Cauchy 列とする．各点 x で $\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列だから，$\mathbb{R}$ の完備性より収束列である．そこで $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し $d(f_n, f_m) < \varepsilon/2$ $(m, n \geq N)$ となる N が存在．このとき $x \in \mathbb{R}$ に対し $|f_n(x) - f_m(x)| \leq d(f_n, f_m) < \varepsilon/2$ であり，ここで $m \to \infty$ とすれば

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \therefore \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad (n \geq N)$$

となる．(2) より $f \in X$ であり，$d(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ となるから $\{f_n\}$ は X の収束列となる．従って X は完備である． $\square$