

【問題】 コンパクトな距離空間は稠密な可算部分集合を含む事を証明せよ。

(S49 九州大学理学研究科)

【解答】 (X, d) をコンパクト距離空間とする. $x \in X$ を中心とする半径 $\varepsilon > 0$ と開球を $U_\varepsilon(x)$ と記す. X はコンパクトだから, 各正整数 n に対し $X = \bigcup_{x \in A_n} U_{1/n}(x)$ となる有限集合 $A_n \subset X$ が存在する. ここで $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とすれば A は可算集合. また $x \in X$, 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対し $n > 1/\varepsilon$ となる n をとれば $x \in U_{1/n}(a)$ となる $a \in A_n$ が存在し, $d(x, a) < 1/n < \varepsilon$, 即ち $a \in U_\varepsilon(x)$ が成立. 従って x は A の閉包に含まれる. 以上より A は X の稠密な可算集合である事が示された. \square

【問題】 $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ を無限個のコンパクトでない位相空間 X_α の積空間とすると, X のコンパクトな部分集合は内点を持たない事を証明せよ.

(S49 九州大学理学研究科)

【解答】 $p_\lambda : X \rightarrow X_\lambda$ を射影とする. 内点 x を持つ X のコンパクト集合 K が存在したとすると, $x \in \bigcap_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subset K$ となる有限個の開集合 $U_{\alpha_i} \subset X_{\alpha_i}$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$) が存在する. $i = 1, \dots, n$ に対し $p_{\alpha_i} \left(\bigcap_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \right) = U_{\alpha_i}$, $\alpha \in A - \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ に対し $p_\alpha \left(\bigcap_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \right) = X_\alpha$ であり, 特に後者の場合 $X_\alpha \subset p_\lambda(K)$ となるが, これは X_λ が非コンパクトである事に反する. \square