【問題】 X, Y を 2 つの位相空間とし，$\phi : X \to Y$ を位相同型写像とする．

(1) 次を示せ：「X がコンパクト」と「Y がコンパクト」は同値である．

(2) $\{p_1, \ldots, p_k\} \subset X$ を X 内の任意の k 個の点とする．X, Y の部分空間

$$\hat{X} = X \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}, \qquad \hat{Y} = Y \setminus \{\phi(p_1), \ldots, \phi(p_k)\}$$

を定義する．次を示せ：「$\hat{X}$ が連結」と「$\hat{Y}$ が連結」は同値である．

(3) 通常の位相を持っている 4 つの位相空間を考える：

$$M_1 = \mathbb{R}^1, \qquad M_2 = (0,1) \subset \mathbb{R}^1,$$
$$M_3 = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \qquad M_4 = \mathbb{R}^2$$

(1) と (2) を使って位相同型でない M_i と M_j の組をすべて見つけよ．

(4) M_i と M_j の 1 つの組は位相同型である．その組 M_i と M_j に対する具体的な位相同型射 $\phi : M_i \to M_j$ を作れ．

(H15 神戸大 自然科学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) X がコンパクトだとする．Y の任意の開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を取る．各 $\alpha \in A$ に対して $U_\alpha = \phi^{-1}(V_\alpha)$ とすれば U_α は開集合であり，任意の $x \in X$ に対し $\phi(x) \in V_\alpha$ となる $\alpha \in A$ を取れば $x \in U_\alpha$ となるから，$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は X の開被覆となる．ここで X がコンパクトだという仮定を用いれば $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の有限部分被覆 $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$ が存在する．任意の $y \in Y$ について $x = \phi^{-1}(y) \in U_{\alpha_i}$ となる α_i をとれば $y \in \phi(U_{\alpha_i}) = V_{\alpha_i}$ となるから，$\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$ は Y の被覆となる．即ち，Y の任意の開被覆は有限部分被覆を持つ事が示された． ϕ を ϕ^{-1} に置き換えて議論すれば逆も同様に示される．

(2) $\hat{X}$ が連結だとする．開集合かつ閉集合となる $\hat{Y}$ の部分集合 B をとる．また $A = \phi^{-1}(B)$ とする．Y の開集合 V と閉集合 G で $B = \hat{Y} \cap V = \hat{Y} \cap G$ となるものをとるとき，$U = \phi^{-1}(V)$，$F = \phi^{-1}(G)$ とすれば U は X の開集合，F は X の閉集合であり，

$$A = \phi^{-1}(\hat{Y} \cap V) = \phi^{-1}(\hat{Y}) \cap \phi^{-1}(V) = \hat{X} \cap U.$$

同様に $A = \hat{X} \cap F$ となる事が分かる． 従って A は $\hat{X}$ の開, かつ閉集合となり，$\hat{X}$ が連結であることから $A = \varnothing$ または $A = \hat{X}$ のいずれかが成り立ち，従って $B = \phi(A)$ についても $B = \varnothing$ または $B = \hat{Y}$ のいずれかが成立．故に $\hat{Y}$ が連結である事が示された．ϕ を ϕ^{-1} に置き換えて議論すれば逆も同様に示される．

(3) (4) Heine-Borel の被覆定理より $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合はコンパクトである． これより M_3 のみがコンパクトとなる． 従って $\{M_1, M_3\}$, $\{M_2, M_3\}$, $\{M_3, M_4\}$ は位相同型にはならない組である．

次に仮に M_1 と M_4 が位相同型だとし，$\phi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ がその位相同型を与える写像だとする． 必要なら平行移動を用いて $\phi(0) = 0$ であると仮定してもよい． このとき $\widehat{\mathbb{R}^1} = \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ に於いて $(-\infty, 0)$ $(\neq \varnothing, \hat{\mathbb{R}^1})$ は $\widehat{\mathbb{R}^1}$ の開かつ閉集合だから $\hat{\mathbb{R}^1}$ は連結ではない． 一方，$\widehat{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の任意の点 (x,y) に対し $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ $(r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ と置くとき，

$$\gamma_1(t) = t \quad (1 \leq t \leq r), \qquad \gamma_2(t) = (r\cos t, r\sin t) \quad (0 \leq t \leq \theta)$$

とすれば $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ は $(1,0)$ と (x,y) を結ぶ $\widehat{\mathbb{R}^2}$ 内の道となり，従って $\widehat{\mathbb{R}^2}$ は (弧状) 連結となる． これは (2) の主張に反するから，M_1 と M_4 は位相同型ではない．

M_1 と M_2 は位相同型となる． 実際，$\phi : M_2 \to M_1$，$\phi(t) = -\cot \pi t$ とする． ϕ は C^∞ 級関数であり，$\phi'(t) = \pi / \sin^2 \pi t > 0$ より狭義単調増加． 更に $\phi(t) \to -\infty$ $(t \to 0+0)$，$\phi(t) \to +\infty$ $(t \to 1-0)$ より ϕ は M_2 から M_1 への全単射となり，更に逆関数定理より，特に ϕ^{-1} も連続． これより ϕ は M_2 と M_1 は位相同型射となる． □