【問題】 次のすべての問に答えよ.

(A) $\mathbb{R}$ 上の関係 $\sim$ を

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{ある正の実数 } c \text{ が存在して } x = cy \text{ が成立する}$$

により定義する. 以下の問に答えよ.

(1) 上で定義した $\sim$ が $\mathbb{R}$ 上の同値関係である事を示せ.
(2) $\mathbb{R}$ を同値関係 $\sim$ で割った商集合を X とする. X の元を全て書け.
(3) $\mathbb{R}$ には標準的な位相が入っているものとする. また $\pi : \mathbb{R} \to X$ を自然な射影とし, X には π から定まる商位相を入れる. この商位相に関し X が Hausdorff 空間であるかどうかを判定せよ.

(B) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の関数 d を次で定義する.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & (x = y), \\ 1 & (x \neq y). \end{cases}$$

以下の問に答えよ.

(1) d は $\mathbb{R}$ 上の距離を定める事を示せ.
(2) 一点からなる $\mathbb{R}$ の部分集合は d に関して開集合かどうかを判定せよ.
(3) $\mathbb{R}$ の部分集合 K が d に関してコンパクトであるとする. このとき K は有限集合である事を示せ.

(H30 広島大学理学研究科)

【解答】 (A) (1) (i) $x \in \mathbb{R}$ に対し $x = 1 \cdot x$ より $x \sim x$.
(ii) $x, y \in \mathbb{R}$ に対し $x \sim y$ ならば $x = cy$ となる $c > 0$ が存在する. このとき $c^{-1} > 0$ かつ $y = c^{-1}x$ より $y \sim x$.
(iii) $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対し $x \sim y$, $y \sim z$ だとすると $x = cy$, $y = dz$ となる $c, d > 0$ が存在. $cd > 0$ かつ $x = cdz$ より $x \sim z$.
以上 (i) (ii) (iii) より $\sim$ は $\mathbb{R}$ 上の同値関係である事が確められた.
(2) $1, 0, -1$ を含む同値類をそれぞれ x_+, x_0, x_- と記す. $x \in \mathbb{R}$ に対し

- $x > 0$ ならば $x = x \cdot 1$ より $x \sim 1$. 逆に $x \sim 1$ ならば $x = c1$ となる $c > 0$ が存在し, 従って $x > 0$ となる. 故に $x \in x_+ \ \Leftrightarrow \ x > 0$ となる.
- $x < 0$ だとすると $x = (-x) \cdot (-1)$ より $x \sim -1$. 逆に $x \sim -1$ ならば $x = c(-1)$ となる $c > 0$ が存在し, 従って $x < 0$ となる. 故に $x \in x_- \ \Leftrightarrow \ x < 0$ となる.
- $x = 0$ ならば $x \sim 0$ であり, 逆に $x \sim 0$ ならば $x = c \cdot 0$ となる $c > 0$ が存在し, 従って $x = 0$ となる. 故に $x \in x_0 \ \Leftrightarrow x = 0$ となる.

これらより $X = \{x_+, x_0, x_-\}$ となる.
(3) U を X に於ける x_0 の任意の近傍とする. $\pi^{-1}(U)$ は 0 を含む開集合だから $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \pi^{-1}(U)$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する. このとき $\pi((-\varepsilon, 0)) = \{x_-\}$, $\pi((0, \varepsilon)) = \{x_+\}$ より $x_\pm \in U$, 従って $U = X$ となるから X は T_2 分離公理を満たさない.

(B) (1) $d(x,y) \geq 0$ かつ $d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$ となる事, 及び $d(x,y) = d(y,x)$ となる事は定義より明らか. $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対し $x = y = z$ ならば $d(x,y) = d(x,z) + d(z,x) = 0$ となる. これ以外のとき $d(x,z) + d(z,y) \geq 1 \geq d(x,y)$ だから d は三角不等式も満たす. 故に d は $\mathbb{R}$ 上の距離となる.
(2) 任意の $x \in \mathbb{R}$ について, x を中心とし 1 を半径とする 1 近傍は $\{y \in \mathbb{R} : d(y,x) < 1\} = \{x\}$ となるから, 1 点集合 $\{x\}$ は d に関して開集合である.
(3) K の各点 x に対し, d に関し x を中心とし, 1 を半径に持つ 1 近傍を U_x とすれば, $\{U_x\}_{x \in K}$ は K の開被覆である. K はコンパクトだから $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ となる有限個の元 $x_1, \cdots, x_n \in K$ が存在する. 各 U_{x_i} の半径は 1 だから, d の定義より $U_{x_i} = \{x_i\}$. 従って $U_{x_i} \subset K$ であり, かつ

$$K = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = \bigcup_{i=1}^n \{x_i\} = \{x_1, \cdots, x_n\}.$$

従って K は有限集合となる. □

【問題】 次の (A) (B) のすべての問に答えよ．

(A) n を正整数とする．以下の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たす関数 $p:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ をノルムという．

(i) 各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $p(\boldsymbol{x}) \geq 0$．さらに $p(\boldsymbol{x}) = 0$ は $\boldsymbol{x} = (0,\cdots,0)$ と同値である．
(ii) 各 $a \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $p(a\boldsymbol{x}) = |a|p(\boldsymbol{x})$.
(iii) 各 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \leq p(\boldsymbol{x}) + p(\boldsymbol{y})$.

また $\boldsymbol{x} = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|$ はノルムである事を示せ.
(2) $p:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ をノルムとする．このとき，或る正の実数 C が存在して，各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $p(\boldsymbol{x}) \leq C\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ事を示せ.
(3) $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}$ に通常の位相を入れる．このとき任意のノルム $p:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続である事を示せ.

(B) 集合 $\mathbb{R}$ の部分集合の族 $\mathcal{O}_+$ を

$$\mathcal{O}_+ = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}$$

で定める．ここで $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ である．次の問に答えよ．

(1) $\mathcal{O}_+$ は位相 (開集合系) の公理を満たす事を示せ.
(2) 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_+)$ は連結である事を示せ.
(3) $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}$ 上の通常の位相とする．位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_+)$ から位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ への連続写像は定値写像である事を示せ.

(H28 広島大学理学研究科)

【解答】 (A) (1) $\|\boldsymbol{x}\|$ について (i) (ii) (iii) を満たす事を確かめる.
(i) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ となる事は自明．また $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ となる.
(ii) $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\alpha^2(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$.
(iii) Schwarz の不等式 $|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ より

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2) \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2.$$

従って $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ となる.
(2) $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とし，$c = \max\{p(\boldsymbol{e}_i) : i = 1,\ldots,n\}$ とする．$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{e}_i$ に対し p に関する三角不等式，及び $|x_i| \leq \|\boldsymbol{x}\|$ $(i = 1,\ldots,n)$ より

$$p(\boldsymbol{x}) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| p(\boldsymbol{e}_i) \leq c\sum_{i=1}^n |x_i| \leq cn\|\boldsymbol{x}\|$$

$cn = C$ と置けば $C > 0$ かつ $p(\boldsymbol{x}) \leq C\|\boldsymbol{x}\|$ となる.
(3) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ をとる．任意の $\varepsilon > 0$ に対し $0 < \delta < \varepsilon/C$ となる δ をとるとき，$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| < \delta$ となる $\boldsymbol{y}$ に対し

$$p(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \leq C\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| < C\delta < \varepsilon$$

となり，従って p は $\boldsymbol{x}$ に於いて連続，従って p は連続である.

(B) (1) (O1) $\varnothing, \mathbb{R} \in \mathcal{O}_+$ は自明.
(O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}_+$ とする．$O_1 = \varnothing$ ならば $O_1 \cap O_2 = \varnothing$，$O_1 = \mathbb{R}$ ならば $O_1 \cap O_2 = O_2$．$O_2 \in \{\varnothing, \mathbb{R}\}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_+$ となる事も同様．$O_i = (a_i, +\infty)$ $(a_i \in \mathbb{R})$ とする．$a_1 \geq a_2$ ならば $O_1 \cap O_2 = O_1$，$a_1 < a_2$ ならば $O_1 \cap O_2 = O_2$ だから $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_+$ である.
(O3) $O_\lambda \in \mathcal{O}_+$ $(\lambda \in \Lambda)$ とする．$O_\lambda = \mathbb{R}$ となる λ が存在すれば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda = \mathbb{R}$．また任意の λ について $O_\lambda = \varnothing$ ならば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda = \varnothing$．任意の λ について $O_\lambda = (a_\lambda, +\infty)$ $(a_\lambda \in \mathbb{R})$ であるとする．$b = \inf\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とするとき，$b = -\infty$ ならば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda = \mathbb{R}$．$b \in \mathbb{R}$ ならば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \subset (b, +\infty)$．一方，$x \in (b, +\infty)$ に対し，b の定義より $b < a_\lambda < x$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在し，$x \in (a_\lambda, +\infty) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$．従って $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda = (b, \infty) \in \mathcal{O}_+$.

以上より $\mathcal{O}_+$ は開集合系の公理を満たす事が確められた．

(2) O を $\mathbb{R}$ の $\varnothing$ ではない開集合かつ閉集合とする．$O \neq \mathbb{R}$ ならば $O = (a, +\infty)$ $(a \in \mathbb{R})$ と表される．一方，O は閉集合でもあるから $O = (-\infty, b]$ $(b \in \mathbb{R})$ と表されるが，$b \leq a$ ならば $b \notin (a, +\infty) = O$ となり矛盾．$a < b$ ならば $a \in (-\infty, b] = O$ となり矛盾．故に $O = \mathbb{R}$ でなければならない．よって $\mathbb{R}$ は連結である．

(3) f を $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_+)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ への連続写像とする． $f(a) \neq f(b)$ となる $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq b)$ が存在したとすると $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \cap (f(b) - \varepsilon, f(b) + \varepsilon) = \varnothing$ となる $\varepsilon > 0$ がとれる．f は連続だから $f^{-1}(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) = (\alpha, +\infty)$, $f^{-1}(f(b) - \varepsilon, f(b) + \varepsilon) = (\beta, +\infty)$ $(\alpha, \beta \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R})$ と表される． 開集合の形より一方が他方に含まれる． 仮に $(\beta, +\infty) \subset (\alpha, +\infty)$ だとすると $x \in f^{-1}(f(b) - \varepsilon, f(b) + \varepsilon)$ に対し

$$(f(b) - \varepsilon, f(b) + \varepsilon) \ni f(x) \in f(\alpha, +\infty) = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$$

となり ε のとり方に反する．仮に $(\beta, +\infty) \supset (\alpha, +\infty)$ でも同様だから何れの場合も矛盾し，故に $f(a) \neq f(b)$ となる a, b は存在しない．即ち f は定値写像となる． $\square$

【問題】 実数全体の集合に通常の位相を入れたものを $\mathbb{R}_u$，離散位相を入れたものを $\mathbb{R}_d$ で表す事にする．次の問の答えよ．ただし離散位相とは全ての部分集合を開集合とする位相の事である．

(1) 恒等写像 $id:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}_d$ から $\mathbb{R}_u$ への写像として連続か．理由をつけて答えよ．
(1) 恒等写像 $id:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}_u$ から $\mathbb{R}_d$ への写像として連続か．理由をつけて答えよ．
(3) $\mathbb{R}_d$ はコンパクトか．理由をつけて答えよ．
(4) $\mathbb{R}_d$ は連結か．理由をつけて答えよ．
(5) 写像 $\rho:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を次で定義する．

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0 & (x=y),\\ 1 & (x\neq y).\end{cases}$$

このとき ρ は $\mathbb{R}$ 上の距離になる事を示せ．また距離 ρ から定まる $\mathbb{R}$ の位相は離散位相に一致する事を示せ．
(6) $\mathbb{R}_d$ で収束する点列は $\mathbb{R}_u$ でも収束することを示せ．
(7) 写像 $f:\mathbb{R}_u\to\mathbb{R}_d$ が連続ならば，ある $a\in\mathbb{R}$ があって，全ての $x\in\mathbb{R}$ に対し $f(x)=a$ となる事を示せ．ただし $\mathbb{R}_u$ が連結である事は証明無しに用いてもよい．

(H26 広島大学理学研究科)

【解答】 (1) $\mathbb{R}_u$ の任意の開集合 U に対し $id^{-1}(U)=U$ は $\mathbb{R}_d$ の開集合だから id は連続である．

(2) $\{0\}$ は $\mathbb{R}_d$ の開集合だが，$id^{-1}(\{0\})=\{0\}$ は $\mathbb{R}_u$ の開集合ではない．従って id は不連続である．

(3) $\{\{x\}\}_{x\in\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}_d$ の開被覆となるが，この開被覆の有限個からなる如何なる部分集合も $\mathbb{R}$ の被覆にはならない．よって $\mathbb{R}_d$ はコンパクトではない．

(4) $\mathbb{R}_d$ の任意の部分集合は開，かつ閉集合となり，これより $\mathbb{R}_d$ は非連結である．

(5) $\rho(x,y)\geq 0$，$\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$，及び $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ となる事は定義より明らか．また $x,y,z\in\mathbb{R}$ に対し $x=y$ ならば $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$ となる事は自明．一方，$x\neq y$ のとき，$x=z$ (resp. $z=y$) ならば $z\neq y$ (resp. $z\neq x$) だから $\rho(x,z)+\rho(z,y)=0+1=\rho(x,y)$ (resp. $\rho(x,z)+\rho(z,y)=1+0=\rho(x,y)$)．$z\neq x,y$ ならば $\rho(x,z)+\rho(z,y)=1+1>1=\rho(x,y)$．よって何れの場合も $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$ となる．以上より ρ が $\mathbb{R}$ 上の距離となる事が確められた．

$x\in\mathbb{R}$ とする．定義より半径 $1/2$ に対する $1/2$ 近傍 $U^{\rho}_{1/2}(x)$ は 1 点集合 $\{x\}$ だから任意の 1 点集合は ρ より定まる位相に関し開集合となる．さらに任意の部分集合 $S\subset\mathbb{R}$ は $S=\bigcup_{x\in S}\{x\}$ となるから，S は ρ より定まる位相に関し開集合となり，よってこの位相は離散位相と一致する．

(6) (5) より $a\in\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}_d$ に於ける基本近傍系として $\{U^{\rho}_{\varepsilon}(x)\}_{0<\varepsilon}$ がとれる．ここで $\mathbb{R}_d$ に於ける点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が a に収束したとする．このとき $1/2$ に対し $a_n\in U^{\rho}_{1/2}(a)\ \ (n\geq n_0)$ となる n_0 が存在する．$U^{\rho}_{1/2}(a)=\{a\}$ だから，$n\geq n_0$ となる n に対し $a_n=a$ となる．従って a の任意の近傍 U に対し $a_n\in U\ \ (n\geq n_0)$ となるから $\{a_n\}$ は $\mathbb{R}_u$ に於いても a に収束する．

(7) $\mathbb{R}_d$ の部分集合 S が a を含むとする．このとき $\{a\}\cap S-\{a\}=\varnothing$ かつ $\{a\}$，$S-\{a\}$ はそれぞれ開集合となるから，S が連結ならば $S-\{a\}=\varnothing$，即ち $\mathbb{R}_d$ の連結な部分集合は 1 点集合しかない．今，$f(0)=a$ だとする．連続写像による連結集合の像は再び連結である事から，$f(\mathbb{R}_u)$ は $\mathbb{R}_d$ の連結な部分集合となり，上に述べた事から $f(\mathbb{R}_u)=\{a\}$ となる． □

【問題】 集合 X から集合 Y への全射 $\pi : X \to Y$ を考える．次の問に答えよ．

(1) B を Y の部分集合とするとき，$\pi(\pi^{-1}(B)) = B$ が成立する事を示せ．
(2) $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を Y の部分集合とするとき，$\pi^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \pi^{-1}(B_\lambda)$ が成立する事を示せ．
(3) $\mathcal{O}_X$ を集合 X 上の位相を定める開集合族とする．Y の部分集合 B で $\pi^{-1}(B) \in \mathcal{O}_X$ となるもの全体が作る Y の部分集合族を $\mathcal{O}_Y$ とする．このとき $\mathcal{O}_Y$ は開集合系の公理を満たす事を示せ．
(4) X, Y の位相を (3) の $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ で定める．位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $\tilde{f} : X \to Z$，$f : Y \to Z$ があり，$\tilde{f} = f \cdot \pi$ が成立しているとする．このとき $f : Y \to Z$ が連続である為の必要十分条件は $\tilde{f} : X \to Z$ が連続写像である事を示せ．
(5) X, Y の位相を (3) の $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ で定める．X がコンパクトであるなら Y もコンパクトである事をコンパクトの定義に従って証明せよ．
(6) $(X, \mathcal{O}_X)$ は閉区間 $[0,1]$ に通常の距離から定まる位相を入れたものとする．次で定まる $X = [0,1]$ 上の同値関係 $\sim$ を考える．

$$x \sim y \iff x = y \text{ または } \{x, y\} = \{0, 1\}.$$

今, Y を商集合 $X/\sim$ とし，$\pi : X \to Y$ を商射影とする．Y の位相は (3) の $\mathcal{O}_Y$ により定める．また Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の単位円周 $\mathbb{S}^1$ を考える．
 (a) 上記の位相空間 X から単位円周 $\mathbb{S}^1$ への連続写像 $\tilde{f} : X \to \mathbb{S}^1$ で

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y) \iff x \sim y$$

 となるものを与えよ．
 (b) 上記の位相空間は単位円周 $\mathbb{S}^1$ に同相である事を証明せよ．

(H21 広島大学理学研究科 改題)

【解答】 (1) $y \in \pi(\pi^{-1}(B))$ のとき，$\pi(x) = y$ となる $x \in \pi^{-1}(B)$ が存在し，特に $y = \pi(x) \in B$，従って $\pi(\pi^{-1}(B)) \subset B$ となる．一方，任意の $b \in B$ に対し，π は全射だから，$\pi(x) = b$ となる $x \in X$ が存在．$x \in \pi^{-1}(B)$ だから $b \in \pi(\pi^{-1}(B))$，従って $B \subset \pi(\pi^{-1}(B))$ となる．前者と併せて等号が成立する．

(2) $x \in \pi^{-1}(B_\lambda)$ ならば $\pi(x) \in B_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$，$x \in \pi^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)$．よって $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \pi^{-1}(B_\lambda) \subset \pi^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)$ が成立．一方，$x \in \pi^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)$ のとき，$\pi(x) \in B_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在し，このとき $x \in \pi^{-1}(B_\lambda)$．従って $\pi^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \pi^{-1}(B_\lambda)$ が成立．前者と併せて等号が成立する．

(3) (i) $X = \pi^{-1}(Y)$，$\varnothing = \pi^{-1}(\varnothing)$ より $Y, \varnothing \in \mathcal{O}_Y$．
(ii) O_1，$O_2 \in \mathcal{O}_Y$ とする．$\pi^{-1}(O_1 \cap O_2) \subset \pi^{-1}(O_i)$ $(i = 1, 2)$ より $\pi^{-1}(O_1 \cap O_2) \subset \pi^{-1}(O_1) \cap \pi^{-1}(O_2)$．一方，$x \in \pi^{-1}(O_1) \cap \pi^{-1}(O_2)$ ならば $\pi(x) \in O_1$ かつ $\pi(x) \in O_2$ より $\pi(x) \in O_1 \cap O_2$，$x \in \pi^{-1}(O_1 \cap O_2)$．従って $\pi^{-1}(O_1) \cap \pi^{-1}(O_2) \subset \pi^{-1}(O_1 \cap O_2)$，前者と併せて $\pi^{-1}(O_1 \cap O_2) = \pi^{-1}(O_1) \cap \pi^{-1}(O_2) \in \mathcal{O}_X$ となり，$O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_Y$ を得る．
(iii) $O_\lambda \in \mathcal{O}_Y$ $(\lambda \in \Lambda)$ とすれば，(2) より $\pi^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \pi^{-1}(O_\lambda) \in \mathcal{O}_X$ だから $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}_Y$ となる．

以上の (i) (ii) (iii) より $\mathcal{O}_Y$ は開集合系の公理を満たす事が確められた．

(4) $\tilde{f}$ が連続だとする．任意の $O \in \mathcal{O}_Z$ に対し $\pi^{-1} \cdot f^{-1}(O) = \tilde{f}^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$ だから $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Y$，従って f は連続となる．逆に f が連続だとする．任意の $O \in \mathcal{O}_Z$ に対し $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Y$ であり，$\mathcal{O}_Y$ の定義より $\tilde{f}^{-1}(O) = \pi^{-1}(f^{-1}(O)) \in \mathcal{O}_X$．従って $\tilde{f}$ も連続となる．

(5) Y の開被覆 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．(2) より

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \pi^{-1}(O_\lambda) = \pi^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda) = \pi^{-1}(Y) = X$$

だから $\{\pi^{-1}(O_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆となる．X のコンパクト性より $\bigcup_{i=1}^n \pi^{-1}(O_{\lambda_i}) = X$ となる有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在する．更に (1) より

$$Y = \pi(\bigcup_{i=1}^n \pi^{-1}(O_{\lambda_i})) = \bigcup_{i=1}^n \pi(\pi^{-1}(O_{\lambda_i})) = \bigcup_{i=1}^n O_{\lambda_i}$$

だから $\{O_{\lambda_i}\}_{i=1,\cdots,n}$ は $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の有限開被覆となる．従って Y はコンパクトとなる．

(6) (a) $\tilde{f}(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ $(x \in \mathbb{R})$ とすれば $\tilde{f}$ は $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{S}^1$ への連続関数．特に X へ制限したものも連続関数である．$x, y \in X$ に対し

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = y \text{ or } |x - y| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \text{ or } \{x, y\} = \{0, 1\}$$

だから $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y) \Leftrightarrow x \sim y$ となる．

(b) (a) で与えた $\tilde{f}$ に対し $f(\pi(x)) = \tilde{f}(x)$ により写像 $f : Y \to \mathbb{S}^1$ が定義できる．(4) より f は連続となる．また全単射である事も明らか．一般の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}
|(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) - (\cos 2\pi y, \sin 2\pi y)|^2 &= (\cos 2\pi x - \cos 2\pi y)^2 + (\sin 2\pi x - \sin 2\pi y)^2 \\
&= 2 - 2(\cos 2\pi x \cos 2\pi y + \sin 2\pi x \sin 2\pi y) \\
&= 2 - 2(\cos 2\pi(x - y)) = 4 \sin^2 2\pi(x - y)
\end{aligned}$$

となるから，$0 < \varepsilon << 1/2$ となる ε に対し $0 < \delta < 2 \sin \pi\varepsilon$ となる δ をとれば

$$\begin{aligned}
&f(\pi(x - \varepsilon, x + \varepsilon)) = \mathbb{S}^1 \cap \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : \|(p, q) - f(\pi(x))\| < 2 \sin \pi\varepsilon\} \supset \mathbb{S}^1 \cap \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : \|(p, q) - f(\pi(x))\| < \delta\}, \\
&f(\pi([0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1])) = \mathbb{S}^1 \cap \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : \|(p, q) - (1, 0)\| < 2 \sin \pi\varepsilon\} \supset \mathbb{S}^1 \cap \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : \|(p, q) - (1, 0)\| < \delta\}
\end{aligned}$$

が成立．これより f の逆写像の連続性が分かる． □

※ $\tilde{f}$ の $[0, 1)$ への制限は $\mathbb{S}^1$ への連続な全単射となるが，これは位相同型射ではない．

【問題】 実数 x について x 以上の整数で最小のものを $\langle x\rangle$ で表す事にする.

(1) 実数 x,y について $x\le y$ ならば $\langle x\rangle\le\langle y\rangle$ が成り立つ事を示せ.

(2) 実数 x,y について

$$\langle x+y\rangle=\langle x\rangle+\langle y+x-\langle x\rangle\rangle$$

を示せ.

(3) 実数 x,y について

$$d(x,y)=\langle|x-y|\rangle$$

により与えられる d が実数の集合 $\mathbb{R}$ 上の距離になる事を示せ.

(4) 全ての $\mathbb{R}$ の部分集合は, この距離 d に関して開集合になる事を示せ.

(H13 広島大学理学研究科)

【解答】 (1) 任意の x に対し $\langle x\rangle-1<x\le\langle x\rangle$ となる事に注意する. $x\le y$ となる x,y に対し $\langle y\rangle<\langle x\rangle$ だとすると $y\le\langle y\rangle\le\langle x\rangle-1<x$ となり $x\le y$ に反する. 従って $\langle x\rangle\le\langle y\rangle$ となる.

(2) $x+y=\langle x\rangle+y+x-\langle x\rangle\le\langle x\rangle+\langle y+x-\langle x\rangle\rangle$ より $\langle x+y\rangle\le\langle x\rangle+\langle y+x-\langle x\rangle\rangle$. 一方, $\langle x\rangle+y+x-\langle x\rangle=x+y\le\langle x+y\rangle$, $y+x-\langle x\rangle\le\langle x+y\rangle-\langle x\rangle$ より $\langle y+x-\langle x\rangle\rangle\le\langle x+y\rangle-\langle x\rangle$, $\langle x\rangle+\langle y+x-\langle x\rangle\rangle\le\langle x+y\rangle$. 従って $\langle x+y\rangle=\langle x\rangle+\langle y+x-\langle x\rangle\rangle$ となる.

(3) $d(x,y)\ge 0$, $d(x,x)=0$, $d(x,y)=d(y,x)$ となる事は明らか. $d(x,y)=0$ だとすると $0\le|x-y|\le\langle|x-y|\rangle=0$ より $x-y=0$, $x=y$ となる. $x,y,z\in\mathbb{R}$ に対し絶対値に関する三角不等式, (1) (2), 及び $|x-z|-\langle|x-z|\rangle<0$ より

$$d(x,y)\le\langle|x-z|+|z-y|\rangle=\langle|x-z|\rangle+\langle|z-y|+|x-z|-\langle|x-z|\rangle\rangle\le\langle|x-z|\rangle+\langle|z-y|\rangle\rangle=d(x,z)+d(z,y).$$

従って d は三角不等式も満たす.

(4) $x\in\mathbb{R}$ の d に関する ε 近傍 $U_\varepsilon^d(x)=\{y\in\mathbb{R}:d(y,x)<\varepsilon\}$ について, $0<\varepsilon<1$ だとすると $0\le\langle|y-x|\rangle<1$ だから $\langle|y-x|\rangle=0$. 従って $U_\varepsilon^d(x)=\{x\}$. よって 1 点集合 $\{x\}$ は全て開集合となる. 任意の部分集合 S について $S=\bigcup_{x\in S}\{x\}$ となるから S も開集合となる. $\square$