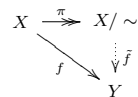


【問題】 位相空間 X から Hausdorff 位相空間 Y への連続写像 $f: X \rightarrow Y$ がある. 今, X の元 x, y に対して $x \sim y$ なる関係 \sim を $f(x) = f(y)$ によって定義し, この同値関係 \sim による商集合 X/\sim に商位相を与えると, 商空間 X/\sim は Hausdorff 空間になる事を証明せよ.

(S51 学習院大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 標準射影 $X \rightarrow X/\sim$ を π と記す. また $f: X \rightarrow Y$ に対し右図式を可換にする X/\sim から Y への連続写像 \tilde{f} が一意に存在する. \sim の定義より \tilde{f} は X/\sim から Y への単射となる.

今, $\pi(x), \pi(y) \in X/\sim$ ($x, y \in X, x \not\sim y$) とする. $\tilde{f}(\pi(x)) = f(x), \tilde{f}(\pi(y)) = f(y)$ と \sim の定義より $f(x) \neq f(y)$. Y の Hausdorff 性より $U \cap V = \emptyset$ となる $f(x), f(y)$ の近傍 U, V が存在する. \tilde{f} は連続だから $\tilde{U} = \tilde{f}^{-1}(U), \tilde{V} = \tilde{f}^{-1}(V)$ はそれぞれ $\pi(x), \pi(y)$ の近傍であり, また \tilde{f} の単射性より $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ となる. 従って X/\sim は Hausdorff 空間である.



□