【問題】 位相空間 X の部分集合 F がコンパクトであるとは

$$F \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

となる任意の開集合族 $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ の中から有限個の開集合 $\{U_{\alpha(1)}, \ldots, U_{\alpha(n)}\}$ が選べて

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha(i)}$$

とできることである．$\mathbb{R}$ にユークリッド空間としての位相を考えるものとする．F を $\mathbb{R}$ の中のコンパクトな部分集合とするとき，上のコンパクトの定義を用いて以下を示せ．

(1) F は有界であることを示せ．

(2) F は閉集合であることを示せ．

(3) F の補集合は高々加算個の交わらない開区間の和集合になることを示せ．

(H11 千葉大学自然科学研究科 数学・情報専攻)

【解答】 (1) F に任意の点 x に対し中心 x，半径 1 の開球 $U_1(x)$ をとる．このとき $F \subset \bigcup_{x\in F} U_1(x)$ と F のコンパクト性より有限個の $x_1, \cdots, x_n \in F$ で $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_1(x_i)$ となるものが存在する．ここで $M = \max\{|x_i| \mid i = 1, \cdots, n\} \ \geq 0$ とする．任意の $x \in F$ はある $U_1(x_i)$ に含まれ，このとき

$$|x| \leq |x_i| + |x - x_i| \leq M + 1$$

が成立．従って $x \in F$ ならば $|x| \leq M + 1$ となり，ゆえに F は有界となる．

(2) $x \in F^c$ とする．任意の $y \in F$ に対し x ,y のそれぞれの開近傍 U_y, V_y で $U_y \cap V_y \neq \varnothing$ となるものがとれる．$F \subset \bigcup_{y\in F} V_y$ と F が compact である事より $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ となる有限個の $y_1, \cdots, y_n \in F$ が存在する．ここで $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ と置けば U は x の開近傍である．$y \in F \cap U$ だとすると $y \in V_{y_i}$ となる y_i が存在するが，$y \in V_{y_i} \cap U \subset V_{y_i} \cap U_{y_i} = \varnothing$ となり矛盾．よって $F \cap U = \varnothing$，$U \subset F^c$ となり，x は F^c の内点となる．故に F^c は開集合，即ち F は閉集合である．

(3) 任意の $x \in F^c$ に対し

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} : (y, x] \subset F^c\}, \qquad B_x = \{y \in \mathbb{R} : [x, y) \subset F^c\}$$

とする．F^c は開集合だから $x \in I_x \subset F^c$ となる開区間 $I_x = (a, b)$ が存在し，$(a, x]$，$[x, b) \subset F^c$ より $A_x, B_x \neq \varnothing$ となる．

(i) F は有界だから $x \in F^c$ で $(-\infty, x] \subset A_x$ となるものが存在する．この x に対し $a_- = \sup B_x$ と置く．定義と F が閉集合である事から $x < a_-$ が分かる．$a_- \in F^c$ だとすると $[a_-, y) \subset F^c$，$a_- < y$ となる y が存在するが，$[x, y) = [x, a_-) \cup [a_-, y) \subset F^c$ より $y \in B_x$，従って $y \leq a_-$ となり矛盾．よって $a_- \in F$ となる．また $[x, \infty) \subset B_x$ となるものが存在し，この x に対し $b_+ = \inf A_x$ と置けば $b_+ \in F$ となる事が上と同様の議論により確かめられる．

以上纏めて $F \subset [a_-, b_+]$，$a_-, b_+ \in F$，かつ $F \cap (-\infty, a_-) = F \cap (b_+, \infty) = \varnothing$ となる．

(ii) $x \in F^c \cap (a_-, b_+)$ とする．F^c は開集合だから $x \in (a, b) \subset F^c$，$a < x < b$ となる $a, b \in F$ が存在する．$(a, x] \subset A_x$ より $A_x \neq \varnothing$．$a_x = \inf A_x \in \mathbb{R}$ とするとき，$a_x \in F^c$ だとすると $(y, a_x] \subset F^c$，$y < a_x$ となる y が存在し，$(y, x] = (y, a_x] \cup (a_x, x] \subset F^c$ より $y \in A_x$ となるが，$y < a_x$ より a_x の定義に反するから $a_x \in F$ である．$b_x = \sup B_x \in \mathbb{R}$ と置けば同様の議論より $b_x \in F$ となる．これらより $x \in F^c \cap (a_-, b_+)$ となる x は $(a_x, b_x) \subset F^c$，$a_x, b_x \in F$ となる開区間に含まれる．

(iii) 開区間 $I = (a, b)$ について $I \subset F^c$ かつ $a, b \in F$ だとする．任意の $x \in I$ に対し $a < \inf A_x$ だとすると $\inf A_x \in (a, x] \subset F^c$ となり (ii) と矛盾．よって定義と併せて $\inf A_x = a$ となる．同様の議論より $\sup B_x = b$ となる事が分かる．

(iv) 端点が F に含まれる開区間の全体に $(-\infty, a_-)$，(b_+, ∞) を付け加えた集合を $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とすれば，(i) (ii) の議論より $F^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ であり，$x \in I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$ ならば (iii) より $a_\lambda = \inf A_x$，$b_\lambda = \sup B_x$ となるから上の和は直和である．また $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ に於ける稠密性より，各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $x_\lambda \in \mathbb{Q}$ となる $x_\lambda \in I_\lambda$ が存在．これを一つずつ固定すれば，$I_\lambda \cap I_\mu = \varnothing$ $(\lambda \neq \mu)$ より $\Lambda \ni \lambda \mapsto x_\lambda \in \mathbb{Q}$ は単射であり，従って Λ は高々可算個である事が分かる．

以上より F の補集合 F^c は高々可算個の交わらない開区間の和集合となる事が示された． $\square$