【問題】 集合 X から集合 Y への写像 $f: X \to Y$ を考える．

(1) X の 2 つの部分集合 A, B に対して，$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ となることを証明せよ．

(ii) 次の 2 つの条件 (a), (b) が同値であることを証明せよ．

(a) 写像 f は単射である．

(b) 集合 X のどんな 2 つの部分集合 A, B に対しても $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成立する．

(H20 千葉大学理学研究科 数学・情報)

【解答】 (1) $x \in A \cap B$ に対して $x \in A$ より $f(x) \in f(A)$，$x \in B$ より $f(x) \in f(B)$ だから，$f(x) \in f(A) \cap f(B)$ となる．

(2) (a) が成立するとき，(1) より $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ が成立．一方，任意の $y \in f(A) \cap f(B)$ だとすると，$y = f(x)$ となる $x \in A$，$y = f(x')$ となる $x' \in B$ が存在する．$f(x) = y = f(x')$ と f の単射性より $x = x'$ が成立．このとき $x = x' \in A \cap B$ より $y = f(x) \in f(A \cap B)$．即ち $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$，従って $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ となる．

(b) が成立するとき，$x, x' \in X$ に対し $x \neq x'$ だとする．$f(\{x\}) = \{f(x)\}$，$f(\{x'\}) = \{f(x')\}$ と仮定より

$$\varnothing = f(\varnothing) = f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = \{f(x)\} \cap \{f(x')\},$$

即ち $f(x) \neq f(x')$ となる．よって f は単射である． □

【問題】

(I) Ω は集合で，$Y \subset X \subset \Omega$，$Z \subset X$ とする．このとき

$$Y - (Y \cap (X - Z)) = Y \cap Z$$

であることを証明せよ．ただし $A \subset B$ は $A \subseteq B$ と同じ意味であり，$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ である．

(II) X, Y は集合，$f: X \to Y$ は写像で，$A \subset X$，$B \subset X$，$C \subset Y$ とする．次の (1), (2), (3) の命題の真偽を述べ，正しいものは証明し，正しくないものは反例を示せ．

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(2) $f(f^{-1}(C)) = C$.

(3) $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$.

(H21 千葉大学理学研究科 数学・情報)

【解答】 (I) $X = Z \amalg (X - Z)$ より $Y = Y \cap X = (Y \cap Z) \amalg (Y \cap (X - Z))$．これより $Y - (Y \cap (X - Z)) = Y \cap Z$ となる．

(II) (1) 真

(証明) $f(A \cup B) \supset f(A), f(B)$ より $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$．一方，$y \in f(A \cup B)$ ならば $y = f(x)$ となる $x \in A \cup B$ が存在する．$x \in A$ ならば $y = f(x) \in f(A)$，$x \in B$ ならば $y = f(x) \in f(B)$ だから，$y \in f(A) \cup f(B)$ となる． ■

(2) 偽

(反例) $X = Y = \{1, 2\}$，$C = Y$，$f(1) = f(2) = 1$ とすれば $f^{-1}(C) = \{1, 2\}$，$f(f^{-1}(C)) = \{1\} \subsetneq C$ となる． ■

(3) 真

(証明) $y \in f(A)$ に対し $y = f(x)$ となる $x \in A$ がとれる．このとき $x \in f^{-1}(f(A))$，$y = f(x) \in f(f^{-1}(f(A)))$，従って $f(f^{-1}(f(A))) \supset f(A)$ となる．一方，$y \in f(f^{-1}(f(A)))$ ならば $y = f(x)$ となる $x \in f^{-1}(f(A))$ が存在．さらに $y = f(x) \in f(A)$，従って $f(f^{-1}(f(A))) \subset f(A)$ となる． ■

【問題】 A, B, C は集合，$f : A \to B$，$g : B \to C$，$h : B \to A$ は写像とする．この問では恒等写像を $id_A : A \to A$ と表す．

(1) 以下の命題 (i), (ii), (iii) のうち，真であるものは証明し，偽であるものは反例を示せ．

(i) $g \circ f$ が単射ならば f は単射である．

(ii) $g \circ f$ が単射ならば g は単射である．

(iii) $h \circ f = id_A$ ならば f は全単射である．

(2) $Y \subset B$ であるとき，$f^{-1}(B - Y) = A - f^{-1}(Y)$ であることを証明せよ．

(H22 千葉大学理学研究科 数学・情報)

【解答】 (1) (i) 真

(証明) $f(x) = f(x')$ だとする．このとき $g \circ f(x) = g \circ f(x')$，および $g \circ f$ が単射だから $x = x'$．従って f は単射である． ■

(ii) 偽

(反例) $A = \{1\}$，$B = C = \{1, 2\}$，$f(1) = 1$，$g(1) = g(2) = 1$ とすれば g は単射ではないが，$g \circ f$ は単射である． ■

(iii) 偽

(反例) $A = \{1\}$，$B = \{1, 2\}$，$f(1) = 1$，$h(1) = h(2) = 1$ とすれば f は全単射ではないが，$h \circ f = id_A$ となる． ■

(2) $x \in f^{-1}(B - Y)$ のとき，$f(x) \in B - Y$．特に $f(x) \notin Y$ だから $x \in A - f^{-1}(Y)$．逆に $x \in A - f^{-1}(Y)$ だとすると，$f(x) \notin Y$，即ち $f(x) \in B - Y$ だから $x \in f^{-1}(B - Y)$ である．

【問題】

(1) f を集合 X から集合 Y への写像とする．X の部分集合 A の f による像を $f(A)$ と書き，Y の部分集合 B による逆像を $f^{-1}(B)$ と書く．次にあげる命題が正しければ証明を与え，誤っていれば反例を与えよ．

(a) X の任意の部分集合 A に対して $Y - f(A) = f(X - A)$ が成り立つ．

(b) Y の任意の部分集合 B_1, B_2 に対して $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ が成り立つ．

(2) 集合 X から集合 Y への写像 f が全射であることと以下の条件

任意の集合 Z に対して Y から Z への写像 g, h が $g \circ f = h \circ f$ を満たせば $g = h$

が同値であることを示せ．

(H23 千葉大学理学研究科 数学・情報)

【解答】 (1) (a) 偽

(反例) $X = Y = \{1, 2\}$，$A = \{2\}$，$f(1) = f(2) = 1$ とすれば $f(A) = \{1\}$, $Y - f(A) = \{2\}$ $f(X - A) = \{1\}$ より $Y - f(A) \neq f(X - A)$ となる． ■

(b) 真

(証明) $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$，従って $x \in f^{-1}(B_1)$ または $x \in f^{-1}(B_2)$ のとき，$x \in f^{-1}(B_1)$ ならば $f(x) \in B_1 \subset B_1 \cup B_2$，$x \in f^{-1}(B_2)$ ならば $f(x) \in B_2 \subset B_1 \cup B_2$ だから $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$．逆に $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$，$f(x) \in B_1 \cup B_2$，従って $f(x) \in B_1$ または $f(x) \in B_2$ のとき，$f(x) \in B_1$ ならば $x \in f^{-1}(B_1)$，$f(x) \in B_2$ ならば $x \in f^{-1}(B_2)$ だから $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ である． ■

(2) f が全射だとする．g, h について $g \circ f = h \circ f$ のとき，任意の $y \in Y$ に対し $y = f(x)$ となる $x \in X$ をとれば $g(y) = g \circ f(x) = h \circ f(x) = h(y)$ だから $g = h$ である．一方，f が全射ではないとすると $y_0 \in Y - f(X)$ がとれる．ここで $Z = \{(0, y_0), (1, y_0)\} \cup (Y - \{y_0\})$ とし，$g, h : Y \to Z$ を

$$g(y) = h(y) = y \quad (y \in Y - \{y_0\}), \qquad g(y_0) = (0, y_0), \quad h(y_0) = (1, y_0)$$

とすると $g \circ f = h \circ f$ かつ $g \neq h$ となる． □