

§ 1.3 写像

§§ 1.3.1 対応・写像

定義 1.3.1. A, B を集合とする.

- (i) 直積 $A \times B$ の部分集合 f との順序対 $(A \times B, f)$ を A から B への対応 (correspondence) と呼び, f を対応 $(A \times B, f)$ のグラフ (graph) という. 対応を $f: a \rightarrow b, a \xrightarrow{f} b$ 等と記す.
- (ii) 対応 $f: A \rightarrow B$ 及び $x \in A$ に対し

$$f(x) = \{y \in B : (x, y) \in f\} \quad (1.3.1)$$

を x の f による像 (image) といい, 特に $f(x)$ が singleton $\{y\}$ のとき, $y = f(x)$ と記す.

- (iii) 対応 $f: A \rightarrow B$ 及び部分集合 $A' \subset A$ に対し

$$f(A') = \{y \in B : (x, y) \in f \text{ となる } x \in A' \text{ が存在する}\} \quad (1.3.2)$$

を A' の f による像という. 特に $f(A)$ を f の像といい, これを $\text{Im } f$ という.

- (iv) 対応 $f: A \rightarrow B$ に対し

$$\text{Dom } f = \{x \in A : f(x) \neq \emptyset\} \quad (1.3.3)$$

を f の定義域 (domain of definition) という.

- (v) 対応 $f: A \rightarrow B$ に対し

$$f^{-1} = \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in f\} \quad (1.3.4)$$

とし, $(B \times A, f^{-1})$ を対応 $(A \times B, f)$ の逆対応 (inverse) という.

- (vi) 対応 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ に対し

$$g \circ f = \{(x, z) \in A \times C : (x, y) \in f, (y, z) \in g \text{ となる } y \in B \text{ が存在する}\} \quad (1.3.5)$$

とし, $g \circ f: A \rightarrow C$ を $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ の合成 (composition) という.

定義 1.3.2. 対応 $f: A \rightarrow B$ に対し

- (i) 任意の $x \in A$ に対し $f(x)$ は singleton.
- (ii) $\text{Dom } f = A$.

という 2 条件が成立するとき, f を A から B への写像 (mapping) という.

定義 1.3.3. 集合 A に対し

$$\Delta_A = \{(x, y) \in A \times A : x = y\} \quad (1.3.6)$$

を $A \times A$ の対角線集合 (diagonal set) という. $\text{id}_A = \Delta_A$ とするとき, 任意の $x \in A$ に対し $\text{id}_A(x) = \{x\}$ かつ $\text{Dom } \text{id}_A = A$ となり $(A \times A, \Delta_A)$ は写像となる. これを A の恒等写像 (identity mapping) という.

定義 1.3.4. 集合 A, B に対し

$$p_A = \{(x, y, z) \in (A \times B) \times A : x = z\}, \quad p_B = \{(x, y, z) \in (A \times B) \times B : y = z\} \quad (1.3.7)$$

とする. $p_A(x, y) = \{x\}$, $p_B(x, y) = \{y\}$ より $((A \times B) \times A, p_A)$, $((A \times B) \times B, p_B)$ はそれぞれ写像となる. $((A \times B) \times A, p_A)$ (resp. $((A \times B) \times B, p_B)$) を $A \times B$ から A (resp. B) への標準的射影 (canonical projection) といい, p_A を proj_A (resp. p_B を proj_B) と記す.

定理 1.3.5.

- (i) 対応 $f: A \rightarrow B$ に対し $\text{id}_B \circ f = f \circ \text{id}_A = f$.
- (ii) 対応 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$ に対し $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ が成立.
- (iii) 対応 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ と A の部分集合 $A' \subset A$ に対し $(g \circ f)(A') = g(f(A'))$.
- (iv) 対応 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ が共に写像ならば合成 $g \circ f$ も写像となる.

証明 (i) $(x, y) \in \text{id}_B \circ f$ とすると $(x, z) \in f$, $(z, y) \in \text{id}_B$ となる $z \in B$ が存在. id_B の定義より $y = z$ だから, 前者より $(x, y) \in f$. 逆に $(x, y) \in f$ のとき, $(y, y) \in \text{id}_B$ より $(x, y) \in \text{id}_B \circ f$, よって $\text{id}_B \circ f = f$ となる. $f \circ \text{id}_A = f$ も同様.

(ii) $(a, d) \in (h \circ g) \circ f$ のとき, $(a, b) \in f$, $(b, d) \in h \circ g$ となる $b \in B$ が存在し, 更に $(b, c) \in g$, $(c, d) \in h$ となる $c \in C$ が存在する. このとき $(a, c) \in g \circ f$ かつ $(c, d) \in h$ だから $(a, d) \in h \circ (g \circ f)$, 故に $(h \circ g) \circ f \subset h \circ (g \circ f)$. 逆の包含関係も同様に示される.

(iii) $x \in A$ に対し $f(x) = y$, $g(y) = z$ だとすると $(x, z) \in g \circ f$ となる.

(iv) $x \in A$ に対し $f(x) = y$, $g(y) = z$ だとすると $(x, z) \in g \circ f$ となる. $w \in g \circ f(x)$ だとすると $(x, w) \in f$, $(w, w) \in g$ となる $w \in B$ が存在. $f(x)$ は singleton だから $w = y$. $g(w) = g(y)$ は singleton だから $w = z$. 従って $g \circ f(x) = \{z\}$ となる. \square

定理 1.3.6. 集合 X, Y 間の写像 $f: X \rightarrow Y$ について次が成立する:

(i) $A_1, A_2 \in \mathfrak{P}(X)$ に対し $A_1 \subset A_2$ ならば $f(A_1) \subset f(A_2)$.

(ii) $A_1, A_2 \in \mathfrak{P}(X)$ に対し $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(iii) $A_1, A_2 \in \mathfrak{P}(X)$ に対し $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

(iv) $A \in \mathfrak{P}(X)$ に対し $f(X) - f(A) \subset f(X - A)$.

(v) $A \in \mathfrak{P}(X)$ に対し $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(vi) $A_\lambda \in \mathfrak{P}(X)$ ($\lambda \in \Lambda$) に対し $f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$.

(vii) $A_\lambda \in \mathfrak{P}(X)$ ($\lambda \in \Lambda$) に対し $f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$.

(viii) $B_1, B_2 \in \mathfrak{P}(Y)$ に対し $B_1 \subset B_2$ ならば $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(ix) $B_1, B_2 \in \mathfrak{P}(Y)$ に対し $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(x) $B_1, B_2 \in \mathfrak{P}(Y)$ に対し $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(xi) $B \in \mathfrak{P}(Y)$ に対し $X - f^{-1}(B) = f^{-1}(Y - B)$.

(xii) $B \in \mathfrak{P}(Y)$ に対し $B \cap f(X) = f(f^{-1}(B))$.

(xiii) $C, D \in \mathfrak{P}(Y)$ に対し $f^{-1}(C \ominus D) = f^{-1}(C) \ominus f^{-1}(D)$.

(xiv) $B_\lambda \in \mathfrak{P}(Y)$ ($\lambda \in \Lambda$) に対し $f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$.

(xv) $B_\lambda \in \mathfrak{P}(Y)$ ($\lambda \in \Lambda$) に対し $f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$.

証明 (i) $y \in f(A_1)$ に対し $y = f(a)$ となる $a \in A_1$ をとる. $a \in A_2$ より $y = f(a) \in f(A_2)$. 故に $f(A_1) \subset f(A_2)$.

(ii) (iii) はより一般の (vi) (vii) に帰着される.

(iv) $y \in f(X) - f(A)$ に対し $y = f(x)$ となる $x \in X$ をとる. $x \in A$ だとすると $y = f(x) \in f(A)$ となり矛盾するから $x \in X - A$. 従って $f(x) \in f(X - A)$. 故に $f(X) - f(A) \subset f(X - A)$.

(v) $a \in A$ に対し $f(a) \in f(A)$, 従って $a \in f^{-1}(f(A))$ となる.

(vi) $y \in f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)$ ならば $y = f(a)$ となる $a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ がとれる. この a に対し $a \in A_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ をとれば $y = f(a) \in f(A_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$. 逆に $y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$ ならば $y \in f(A_\lambda)$ となる $\lambda \in \Lambda$ がとれる. (i) より

$y \in f(A_\lambda) \subset f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)$. 故に等号が成立する.

(vii) $y \in f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)$ ならば $y = f(a)$ となる $a \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ がとれる. このとき任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $a \in A_\lambda$, 従って $f(a) \in f(A_\lambda)$ だから $y \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$ となる.

(viii) $x \in f^{-1}(B_1)$ に対し $f(x) \in B_1 \subset B_2$ だから $x \in f^{-1}(B_2)$. 故に $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(ix) (x) はより一般の (xiii) (xiv) に帰着される.

(xi) $x \in X - f^{-1}(B)$ のとき $f(x) \notin B$ より $f(x) \in Y - B$, 従って $x \in f^{-1}(Y - B)$. 一方, $x \in f^{-1}(Y - B)$ のとき $f(x) \notin B$ より $x \in X - f^{-1}(B)$. 従って $X - f^{-1}(B) = f^{-1}(Y - B)$.

(xii) $x \in f^{-1}(B)$ のとき, $f(x) \in B \cap f(X)$ より $x \in f^{-1}(B \cap f(X))$. 一方, $f^{-1}(B \cap f(X)) \subset f^{-1}(B)$ は自明だから, これらより前半の等式を得る.

$y \in B \cap f(X)$ とする. $y = f(x)$ となる $x \in X$ がとれる. $f(x) \in B$ より $x \in f^{-1}(B)$ だから $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. 逆に $y \in f(f^{-1}(B))$ ならば $y = f(x)$ となる $x \in f^{-1}(B)$ が存在. $f(x) \in f(X)$ かつ $f(x) \in B$ だから $y = f(x) \in B \cap f(X)$. よって後半の等式を得る.

(xiii)

$$\begin{aligned} f^{-1}(C \ominus D) &= f^{-1}((C \cap D^c) \cup (D \cap C^c)) \\ &= (f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)^c) \cup (f^{-1}(D) \cap f^{-1}(C)^c) = f^{-1}(C) \ominus f^{-1}(D). \end{aligned}$$

(xiv) $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right)$ とすると $f(x) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ だから, $f(x) \in B_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ をとれば $x \in f^{-1}(B_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$. 逆に $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$ ならば $x \in f^{-1}(B_\lambda)$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在し, 更に $f(x) \in B_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, 従っ

て $x \in f^{-1}(B_\lambda) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right)$. 故に等号が成立する.

(xv) $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right)$ に対し $f(x) \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ だから, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $f(x) \in B_\lambda$, $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$. 逆に $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$ のとき, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $x \in f^{-1}(B_\lambda)$ だから $f(x) \in B_\lambda$, よって $f(x) \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$. 従って $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right)$ が成立. 故に等号が成立する. \square

例 1.3.7. 命題 1.3.8 の (iii) (従って (vii)), (iv) 及び (v) については一般に等号は成立しない. 例えば写像 $f: \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$ を $f(1) = 1, f(2) = 1$ と定義する. このとき

(iii) $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}$ とする. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ より $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$ だが $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1\}$. 従って $f(A_1 \cap A_2) \subsetneq f(A_1) \cap f(A_2)$ となる.

(iv) $A = \{2\}$ とすると $f(X) = f(A) = \{1\}$ より $f(X) - f(A) = \emptyset$. 一方, $f(X - A) = f(\{1\}) = \{1\}$ だから $f(X) - f(A) \subsetneq f(X - A)$ となる.

(v) $A = \{2\}$ とすると $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{1\}) = \{1, 2\}$ より $A \subsetneq f^{-1}(f(A))$ となる. \square

命題 1.3.8. 集合 X, Y 間の写像 $f: X \rightarrow Y$ について次が成立する.

(i) f に対し次の 3 条件は同値である:

- (1) f は単射である.
- (2) X の任意の部分集合 A, B に対し $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成立.
- (3) X の任意の部分集合 A に対し $f^{-1}(f(A)) = A$ が成立.
- (4) 任意の集合 W と写像 $e_1, e_2: W \rightarrow X$ に対し $f \circ e_1 = f \circ e_2$ ならば $e_1 = e_2$.

(ii) f に対し次の 2 条件は同値である:

- (1) f は全射である.
- (2) Y の任意の部分集合 B に対し $f(f^{-1}(B)) = B$ が成立.
- (3) 任意の集合 Z と写像 $g_1, g_2: W \rightarrow X$ に対し $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ ならば $g_1 = g_2$.

証明 (i) (1) \Rightarrow (2) $y \in f(A) \cap f(B)$ のとき, $y = f(a) = f(b)$ となる $a \in A, b \in B$ が存在. f の単射性より $a = b \in A \cap B$ となるから $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ が成立. 任意の写像に対し逆向きの包含関係が常に成立するから, f が単射ならば等号が成立する.

(2) \Rightarrow (1) $f(x) = f(y)$ だとすると仮定より $\{f(x)\} = f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = f(\{x\} \cap \{y\})$ が成立. $x \neq y$ ならば $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ となり矛盾. 故に $x = y$ となる.

(1) \Rightarrow (3) $x \in f^{-1}(f(A))$ ならば $f(x) \in f(A)$ より $f(x) = f(a)$ となる $a \in A$ が存在. f の単射性より $x = a \in A$, 従って $f^{-1}(f(A)) \subset A$ となる. 逆向きの包含関係は任意の写像について成立するから f が単射ならば等号が成立する.

(3) \Rightarrow (1) $f(x) = f(y)$ ならば $\{x\} \subset f^{-1}(f(\{y\})) = \{y\}$. 従って $x = y$ となる.

(1) \Rightarrow (4) 任意の $w \in W$ をとる. 仮定より $f \circ e_1(w) = f \circ e_2(w)$. f は単射だから $e_1(w) = e_2(w)$. 従って $e_1 = e_2$.

(4) \Rightarrow (1) $x_1, x_2 \in X$ について $f(x_1) = f(x_2)$ だとする. $W = \{x_1\}$ とし

$$e_1: W \rightarrow X, \quad e_1(x_1) = x_1, \quad e_2: W \rightarrow X, \quad e_2(x_1) = x_2$$

とすると $f \circ e_1 = f \circ e_2$ と仮定より $e_1 = e_2$. 特に $x_1 = e_1(x_1) = e_2(x_1) = x_2$ となる. 従って f は単射である.

(ii) (1) \Rightarrow (2) $b \in B$ に対し f の全射性より $f(x) = b$ となる $x \in X$ が存在. $x \in f^{-1}(B)$ だから $b \in f(f^{-1}(B))$. 一方, $b \in f(f^{-1}(B))$ ならば $b = f(x)$ となる $x \in f^{-1}(B)$ が存在し, $f(x) \in B$ より $b \in B$ となる.

(2) \Rightarrow (1) $y \in Y$ に対し $\{y\} = f(f^{-1}(\{y\}))$ より $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. 故に f は全射である. (1) \Rightarrow (3) $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ だとする. 任意の $y \in Y$ に対し $f(x) = y$ となる $x \in X$ をとれば $g_1(y) = g_1(f(x)) = g_2(f(x)) = g_2(y)$. 従って $g_1 = g_2$ となる.

(3) \Rightarrow (1) f は全射ではないとする. $y_1 \in Y - f(X)$ をとるとき,

$$g_0 : Y \rightarrow \{0, 1\} \quad g_0(y) = 0, \quad g_1 : Y \rightarrow \{0, 1\} \quad g_1(y) = \begin{cases} 0 & (y \neq y_1) \\ 1 & (y = y_1) \end{cases}$$

とすると $g_0 \circ f = g_1 \circ f$ かつ $g_0 \neq g_1$ となる. □

命題 1.3.9. 集合 X, Y 間の写像 $f : X \rightarrow Y$ に対し

$$f_* : \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(Y), \quad f_*(A) := f(A), \quad f^* : \mathfrak{P}(Y) \rightarrow \mathfrak{P}(X), \quad f^*(A) := f^{-1}(A)$$

とする.

(i) f に対し次の 3 条件は同値である :

- (1) f は単射である.
- (2) f_* は単射である.
- (3) f^* は全射である.

(ii) f に対し次の 3 条件は同値である :

- (1) f は全射である.
- (2) f_* は全射である.
- (3) f^* は単射である.

証明 (i) (1) \Rightarrow (2) $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ に対し $f_*(A) = f_*(B)$. $a \in A$ に対し $f(a) = f(b)$ となる $b \in B$ がとれる. f は単射だから $a = b \in B$. 故に $A \subset B$. 同様に $B \subset A$ が示され, よって $A = B$, 即ち f_* は単射となる.

(2) \Rightarrow (1) $x, y \in X$ に対し $f(x) = f(y)$ だとすると $f_*({x}) = \{f(x)\} = \{f(y)\} = f_*({y})$ だから $\{x\} = \{y\}$, 故に $x = y$, よって f は単射である.

(1) \Rightarrow (3) $A \in \mathfrak{P}(X)$ に対し $A \subset f^{-1}(f(A))$. 一方, $x \in f^{-1}(f(A))$ に対し $f(x) = f(a)$ となる $a \in A$ が存在. f は単射だから $x = a \in A$, 即ち $f^{-1}(f(A)) \subset A$, $f^{-1}(f(A)) = A$ となる. 従って f^* は全射である.

(3) \Rightarrow (1) $x, y \in X$ に対し $f(x) = f(y)$ だとする. f^* は全射だから $f^*(B) = \{x\}$, $f^*(C) = \{y\}$ となる $B, C \in \mathfrak{P}(Y)$ がとれる. このとき

$$B \cap f(X) = f(f^{-1}(B)) = \{f(x)\} = \{f(y)\} = f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X),$$

$$\therefore \{x\} = f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(X)) = f^{-1}(C \cap f(X)) = f^{-1}(C) = \{y\}, \quad \therefore x = y$$

よって f は単射である.

(ii) (1) \Rightarrow (2) $B \in \mathfrak{P}(Y)$ に対し $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) = B$ だから f_* は全射となる.

(2) \Rightarrow (1) $y \in Y$ に対し $f_*(A) = \{y\}$ となる $A \in \mathfrak{P}(X)$ がとれ, $x \in A$ をとれば $f(x) = y$. 故に f は全射である.

(1) \Rightarrow (3) $B, C \in \mathfrak{P}(Y)$ に対し $f^*(B) = f^*(C)$ だとする. $B = B \cap f(X) = f(f^*(B)) = f(f^*(C)) = C \cap f(X) = C$ より f^* は単射である.

(3) \Rightarrow (1) 任意の $y \in Y$ に対し $y \notin f(X)$ だとすると $f^*({y}) = \emptyset = f^*(\emptyset)$ と f^* の単射性より $\{y\} = \emptyset$ となり矛盾. 故に $y \in f(X)$ となる. □