

【問題】  $A$  を  $m$  行  $n$  列行列,  $B$  を  $n$  行  $m$  列行列とする.

(1)  $\lambda$  が  $AB$  の固有値で, しかも  $\lambda \neq 0$  ならば  $\lambda$  は  $BA$  の固有値でもある事を示せ.

(2)  $\lambda$  が  $AB$  の  $0$  でない固有値のとき,  $\lambda$  に対する  $AB$  の固有空間の次元と  $BA$  の固有空間の次元が等しい事を示せ.

(H18 東京工業大学理学研究科)

【解答】 (1)  $AB\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ ) だとする.  $B\mathbf{x} = \mathbf{o}$  だとすると  $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{o}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{o}$  となり矛盾する. 故に  $B\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ . これと  $BAB\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$  より  $\lambda$  は  $BA$  の固有値となる.

(2)  $V(\lambda, AB)$ ,  $V(\lambda, BA)$  をそれぞれ  $AB, BA$  の  $\lambda$  に関する固有空間とする.  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\}$  を  $V(\lambda, AB)$  の基底とする.  $\sum_{i=1}^s c_i B\mathbf{x}_i = \mathbf{o}$  だとすると  $\sum_{i=1}^s c_i AB\mathbf{x}_i = \lambda(\sum_{i=1}^s c_i \mathbf{x}_i) = \mathbf{o}$ , 及び  $\lambda \neq 0$  より  $\sum_{i=1}^s c_i \mathbf{x}_i = \mathbf{o}$  となる.  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\}$  の一次独立性より  $c_1 = \dots = c_s = 0$ . 従って  $\{B\mathbf{x}_1, \dots, B\mathbf{x}_s\}$  は一次独立となる. (1) の議論より  $B\mathbf{x}_i \in V(\lambda, BA)$  となるから  $\dim V(\lambda, AB) \leq \dim V(\lambda, BA)$  が成立.  $B, A$  の役割を入れ替えれば  $\dim V(\lambda, AB) \geq \dim V(\lambda, BA)$  となるから,  $\dim V(\lambda, AB) = \dim V(\lambda, BA)$  が成立する.  $\square$

【問題】  $\mathbb{C}$  に成分を持つ  $(l, m)$  型行列  $A$  及び  $(m, n)$  型行列  $B$  を考える ( $l, m, n$  は自然数).  $T_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}^l$ ,  $T_B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  を  $A, B$  から定まる線形写像とする.

- (1)  $\text{rank } AB \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$  を示せ.
- (2)  $\text{rank } AB = \text{rank } A$  となる必要十分条件は  $\text{Ker } T_A + \text{Im } T_B = \mathbb{C}^m$  である事を示せ.
- (3)  $\text{rank } AB = \text{rank } B$  となる必要十分条件は  $\text{Ker } T_A \cap \text{Im } T_B = \mathbf{o}$  である事を示せ.
- (4)  $l = m = n = 3$  のとき, 次の (i) (ii) が成立するような  $A, B$  の例をそれぞれ挙げよ.
  - (i)  $0 < \text{rank } AB = \text{rank } A < \text{rank } B$ .
  - (ii)  $0 < \text{rank } AB < \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$ .

(H15 東京工業大学理学研究科)

【解答】 (1)  $\text{Im } T_B \subset \mathbb{C}^m$  より  $\text{Im } T_A(\text{Im } B) \subset \text{Im } T_A$  だから  $\text{rank } AB = \dim \text{Im } T_A(\text{Im } B) \leq \dim \text{Im } T_A = \text{rank } A$ . 一方, 有限次元線形空間  $V, W$  と線形写像  $f: V \rightarrow W$  に対する次元定理から  $\text{rank } f = \dim V - \dim \text{Ker } f \leq \dim V$  だから,  $\text{rank } AB = \dim \text{Im } T_A(\text{Im } B) \subset \dim \text{Im } T_B = \text{rank } B$  が成立. よって  $\text{rank } AB \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$  である.

(2)  $\text{rank } AB = \text{rank } A$  だとする.  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^m$  のとき, 仮定より  $T_A \mathbf{v} = T_{AB} \mathbf{u}$  となる  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  が存在する.  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - T_B \mathbf{u}$  と置けば  $\mathbf{w} \in \text{Ker } T_A$  となる. これより  $\mathbb{C}^m = \text{Ker } T_A + \text{Im } T_B$  となる. 逆に  $\mathbb{C}^m = \text{Ker } T_A + \text{Im } T_B$  だとする. 明らかに  $\text{Im } T_{AB} \subset \text{Im } T_A$  であり, 任意の  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^m$  に対し  $\mathbf{v} = \mathbf{w} + T_B \mathbf{u}$  ( $\mathbf{w} \in \text{Ker } T_A$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ ) と表すとき,  $T_A \mathbf{v} = T_A(T_B \mathbf{u}) \in \text{Im } T_{AB}$  より  $\text{Im } T_A \subset \text{Im } T_{AB}$  が成立. 従って  $\text{rank } A = \text{rank } AB$  となる.

(3)  $\text{rank } AB = \text{rank } B$  だとする.  $\mathbf{v} \in \text{Ker } T_A \cap \text{Im } T_B$  だとすると仮定より  $\mathbf{v} = T_{AB} \mathbf{u}$  となる  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  が存在し,  $\mathbf{v} = T_A(T_B \mathbf{u}) = \mathbf{o}$  となる. 逆に  $\text{Ker } T_A \cap \text{Im } T_B = \mathbf{o}$  だとする. 一般に  $\text{Ker } T_{AB} \supset \text{Ker } T_B$  であり,  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  に対し  $T_{AB} \mathbf{u} = \mathbf{o}$  だとすると  $T_B \mathbf{u} \in \text{Im } T_B \cap \text{Ker } T_A = \mathbf{o}$  より  $\mathbf{u} \in \text{Ker } T_B$ , 従って  $\text{Ker } T_{AB} \subset \text{Ker } T_B$ . よって  $\text{rank } AB = n - \dim \text{Ker } T_{AB} = n - \dim \text{Ker } T_B = \text{rank } B$ .

(4) (i)  $B = E_3$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  とする. このとき  $\text{rank } B = 3$  であり,  $AB = A$  より  $\text{rank } AB = \text{rank } A = 1$  となる.

従って  $0 < \text{rank } AB = \text{rank } A < \text{rank } B$  が成立する.

(ii)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  とする. このとき  $\text{rank } A = \text{rank } B = 2$  であり  $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  より  $\text{rank } AB = 1$ . 従って  $0 < \text{rank } AB < \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$  が成立する. □

【問題】  $A$  を  $n$  次複素正方行列で  $\text{rank } A = \text{rank } A^2$  を満たすものとする. 今,  $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  を  $A$  から定まる線形写像とする. 次を示せ.

- (1)  $\mathbb{C}^n$  は像  $\text{Im } f_A$  と核  $\text{Ker } f_A$  の直和である.
- (2)  $m \geq 2$  に対して  $\text{rank } A^m = \text{rank } A$  である.

(H14 東京工業大学理学研究科)

【解答】 (1)  $\text{Im } f_A^2 \subset \text{Im } f_A$  と  $\text{rank } A^2 = \text{rank } A$  より  $\text{Im } f_A^2 = \text{Im } f_A$  となる.  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  に対し  $f_A(\mathbf{v}) = f_A(f_A(\mathbf{u}))$  となる  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  がとれる. ここで  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - f_A(\mathbf{u})$  と置けば  $\mathbf{v} = \mathbf{w} + f_A(\mathbf{u}) \in \text{Ker } f_A + \text{Im } f_A$ , 故に  $\mathbb{C}^n = \text{Ker } f_A + \text{Im } f_A$  である. 部分空間に関する次元定理と線形写像に関する次元定理より

$\dim \mathbb{C}^n = \dim(\text{Ker } f_A + \text{Im } f_A) = \dim \text{Ker } f_A + \dim \text{Im } f_A - \dim(\text{Ker } f_A \cap \text{Im } f_A)$ ,  $\dim \mathbb{C}^n = \text{rank } f_A + \dim \text{Ker } f_A$   
だから  $\dim(\text{Ker } f_A \cap \text{Im } f_A) = 0$ , 故に  $\text{Ker } f_A \cap \text{Im } f_A = \mathbf{o}$  となり,  $\mathbb{C}^n = \text{Ker } f_A \oplus \text{Im } f_A$  となる.

(2)  $m \geq 2$  に関する帰納法により  $\text{rank } A^m = \text{rank } A$  を示す.  $m = 2$  については仮定より成立. 次に  $m > 2$  とし,  $m - 1$  までの成立を仮定する. 一般に  $\text{Im } A^m \subset \text{Im } A^{m-1}$  が成立. 逆に  $\mathbf{v} \in \text{Im } A^{m-1}$  のとき,  $\mathbf{v} = f_A^{m-1}(\mathbf{v}')$  と表される. (1) より  $\mathbf{v}' = f_A(\mathbf{u}) + \mathbf{w}$  ( $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{w} \in \text{Ker } f_A$ ) と表され,

$$\mathbf{v} = f_A^{m-1}(f_A(\mathbf{u}) + \mathbf{w}) = f_A^{m-1}(f_A(\mathbf{u})) + f_A^{m-1}(f_A(\mathbf{w})) = f_A^m(\mathbf{u}) \in \text{Im } f_A^m$$

が成立. よって  $\text{Im } f_A^m = \text{Im } f_A^{m-1}$ , 従って  $\text{rank } A^m = \text{rank } A^{m-1} = \text{rank } A$  となる. □

【問題】

- (1)  $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$  を  $n$  次 unitary 行列のとき、全ての  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  に対して  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i$  が成り立つ事を示せ。ただし  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t \mathbf{x} \overline{\mathbf{y}}$  とする。
- (2)  $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$ ,  $B = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n]$  を  $n$  次正方行列とする。このとき、全ての  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  に対して  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) \mathbf{b}_i$  が成立するための、 $A$  と  $B$  に関する条件を求めよ。

(H13 東京工業大学理学研究科)

【解答】 (1) 仮定より  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = {}^t \mathbf{a}_i \overline{\mathbf{a}_j} = \delta_{ij}$  となる。  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i$  とすると

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_j (\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}_i)$$

だから  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i$  となる。

(2) 任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  に対し

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) \mathbf{b}_i = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n] \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{x} \overline{\mathbf{a}_1} \\ \vdots \\ {}^t \mathbf{x} \overline{\mathbf{a}_n} \end{bmatrix} = B^t [{}^t \mathbf{x} \overline{\mathbf{a}_1}, \dots, {}^t \mathbf{x} \overline{\mathbf{a}_n}] = B^t ({}^t \mathbf{x} [\overline{\mathbf{a}_1}, \dots, \overline{\mathbf{a}_n}]) = B^t ({}^t \mathbf{x} \overline{A}) = B^t \overline{A} \mathbf{x}$$

だから、

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) \mathbf{b}_i \quad (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad B^t \overline{A} \mathbf{x} = \mathbf{x} \quad (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad (B^t \overline{A} - E_n) \mathbf{x} = \mathbf{o} \quad (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

より求める条件は  $B^t \overline{A} = E_n$  である。

□