例 **0.0.0.1.** [*1] $k=\mathbb{F}_7$ とする． $A=\begin{bmatrix}1&2&6\\6&4&6\\5&4&0\end{bmatrix}\in M_3(k)$ について

$$\Phi_A(t)=\begin{vmatrix}t-1&-2&-6\\-6&t-4&-6\\-5&-4&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t+5&-2&-6\\0&t-4&-6\\-t-5&-4&t\end{vmatrix}=(t+5)\begin{vmatrix}1&-2&-6\\0&t-4&-6\\0&-6&t-6\end{vmatrix}=(t-1)(t-2)^2$$

より 1, 2 (重複度 2) が A の固有値となる．

$$A-E_3=\begin{bmatrix}0&2&6\\6&3&6\\5&4&6\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad A-2E_3=\begin{bmatrix}-1&2&6\\6&2&6\\5&4&-2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

より 1 に対する固有ベクトルとして $\begin{bmatrix}4\\4\\1\end{bmatrix}$, 2 に対する固有ベクトルとして $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}6\\0\\1\end{bmatrix}$ がとれる． そこで

$$P=\begin{bmatrix}4&2&6\\4&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}2&3&2\\6&3&6\\5&4&6\end{bmatrix}$$

とすれば

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&3&2\\6&3&6\\5&4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&6\\6&4&6\\5&4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2&6\\4&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&2\\5&6&5\\3&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2&6\\4&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

□

例 **0.0.0.2.** $k=\mathbb{F}_7$ とする． $\mathbb{F}_7$ の平方数は $1=1^2=6^2$, $2=3^2=4^2$, $4=2^2=5^2$ の 3 つ, $3,5,6\ (=-1)$ は非平方数である． 従って t^2+1 は $\mathbb{F}_7[t]$ 上既約． $F=\mathbb{F}_7[t]/\mathbb{F}_7[t](t^2+1)$, $\sqrt{-1}=t+\mathbb{F}_7[t](t^2+1)$ と置けば, F は $\mathbb{F}_7$ の 2 次拡大体であり, その任意の数は $x+y\sqrt{-1}\ \ (x,y\in\mathbb{F}_7)$ と表される．

$A=\begin{bmatrix}2&1\\2&4\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{F}_7)$ とする． A の固有多項式 $\Phi_A(t)=\begin{vmatrix}t-2&-1\\-2&t-4\end{vmatrix}=t^2+t+6$ の判別式は $1^2-4\cdot6=-23=5$ は非平方数なので $\mathbb{F}_7$ に於いて既約となり A は $\mathbb{F}_7$ 上で対角化されない． しかし F に於いて $t^2+t+6=(t-3-2\sqrt{-1})(t-3+2\sqrt{-1})$ と因数分解され, よって単根の固有値 $3\pm2\sqrt{-1}$ を持つから A は F^2 上の線形変換として対角化可能となる．

$$\begin{bmatrix}2-(3+2\sqrt{-1})&1\\2&4-(3+2\sqrt{-1})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-2\sqrt{-1}&1\\2&1-2\sqrt{-1}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1-2\sqrt{-1}&1\\0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4-\sqrt{-1}\\0&0\end{bmatrix}$$

より固有値 $3+2\sqrt{-1}$ に関する固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3+\sqrt{-1}\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}+\sqrt{-1}\boldsymbol{y},\qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

がとれ, 特に $A\boldsymbol{x}+\sqrt{-1}A\boldsymbol{y}=3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+\sqrt{-1}(2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y})$ が成立するから

$$A\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y},\qquad A\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}\qquad\therefore\quad A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\begin{bmatrix}3&2\\-2&3\end{bmatrix}.$$

以上より A の F^2 上での標準形 (今の場合は対角化) は $\begin{bmatrix}3+2\sqrt{-1}&0\\0&3-2\sqrt{-1}\end{bmatrix}$, $\mathbb{F}_7^2$ 上の標準形は $\begin{bmatrix}3&2\\-2&3\end{bmatrix}$ となる． □

例 **0.0.0.3.** $A=\begin{bmatrix}4&2\\4&0\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{F}_5)$ とする． A の固有多項式は $\Phi_A(t)=\begin{vmatrix}t-4&-2\\-4&t\end{vmatrix}=t^2+t+2$ となり $\mathbb{F}_5$ に於いて既約となる． 従って A は $\mathbb{F}_5$ 上で対角化されない．

[*1] 菅井氏提供

$\mathbb{F}_7$ と異なり，$\mathbb{F}_5$ の場合は $-1=2^2$ より -1 は平方数となるので，非平方数 2 をとり，$\mathbb{F}_5$ の 2 次拡大 $F=\mathbb{F}_5+\mathbb{F}_5\sqrt{2}$ を考える．このとき t^2+t+2 は F に於いて $t^2+t+2=(t-2-\sqrt{2})(t-2+\sqrt{2})$ と因数分解されるので単根の固有値 $2\pm\sqrt{2}$ を持ち，よって A は F^2 に於いて対角化される．$(2\pm\sqrt{2})^{-1}=1\mp3\sqrt{2}$ に注意すれば

$$\begin{bmatrix}2-\sqrt{2} & 2\\ 4 & -2-\sqrt{2}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2-\sqrt{2} & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2+\sqrt{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

より F に於ける固有値 $2+\sqrt{2}$ に関する固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3-\sqrt{2}\\ 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}+\sqrt{2}\boldsymbol{y},\qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$$

がとれ，特に $A\boldsymbol{x}+\sqrt{2}A\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+\sqrt{2}(\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y})$ が成立する．

$\sigma=F_5$ $(=5$ 乗 Frobenius 準同型) とすれば

$$\sigma(x+y\sqrt{2})=x+y(\sqrt{2})^5=x+4y\sqrt{2}=x-y\sqrt{2}\qquad(x,y\in\mathbb{F}_5)$$

従って $\sigma(2+\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$ であり，$A\boldsymbol{v}=(2+\sqrt{2})\boldsymbol{v}$ の両辺に σ を施せば

$$A\sigma(\boldsymbol{v})=\sigma(2+\sqrt{2})\sigma(\boldsymbol{v}),\qquad A\boldsymbol{x}-\sqrt{2}A\boldsymbol{y}=(2-\sqrt{2})(\boldsymbol{x}-\sqrt{2}\boldsymbol{y})=(2\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y})-\sqrt{2}(\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y})$$

が成立する．従って

$$A\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}(A\boldsymbol{v}+\sigma(A\boldsymbol{v}))=2\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y},\quad A\boldsymbol{y}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(A\boldsymbol{v}-\sigma(A\boldsymbol{v}))=\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}\qquad\therefore\quad A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

以上より A の F 上の標準化 (今の場合は対角化) は $\begin{bmatrix}2+\sqrt{2} & 0\\ 0 & 2-\sqrt{2}\end{bmatrix}$，$\mathbb{F}_5^2$ 上の標準化は $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ となる． □

例 0.0.0.4. $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{F}_5)$ とする．固有多項式 $\Phi_A(t)=t^3+t+1$ は $\mathbb{F}_5$ に於いて既約であり，従って A は $\mathbb{F}_5$ 上で対角化されない．

今，t^3+t+1 の $\mathbb{F}_5$ 上の最小分解体を F とし，F に於ける解の一つを $\theta_1=\theta$ とする．5 乗 Frobenius 準同型 F_5 を施せば

$$\theta_2=F_5(\theta)=\theta^5=-\theta^2+\theta+1,\qquad \theta_3=F_5^2(\theta)=F_5(-\theta^2+\theta+1)=-\theta^{10}+\theta^5+1=\theta^2-2\theta-1$$

が他の 2 解であり，$\theta_1,\theta_2,\theta_3$ は相違だから A は対角化可能となる．F に於ける固有値 θ_1 に対し

$$\begin{bmatrix}3-\theta & -1 & 2\\ -1 & -\theta & 2\\ 2 & 0 & 2-\theta\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3-\theta & -1 & 2\\ -1 & -\theta & 2\\ 1 & 0 & 1-3\theta\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\theta^2+1\\ 0 & -\theta & 3-3\theta\\ 1 & 0 & 1-3\theta\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1-3\theta\\ 0 & 1 & -2\theta^2+1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

より，固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1={}^t[3\theta-1,2\theta^2-1,1]$ がとれる．更に θ_2,θ_3 に関する固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{v}_2=F_5(\boldsymbol{v}_1)=\begin{bmatrix}3\theta_2-1\\ 2\theta_2^2-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\theta^2+3\theta+2\\ \theta^2+\theta\\ 1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{v}_3=F_5^2(\boldsymbol{v}_1)=\begin{bmatrix}3\theta_3-1\\ 2\theta_3^2-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\theta^2-\theta+1\\ 2\theta^2-\theta+2\\ 1\end{bmatrix}$$

がとれる．ここで $\boldsymbol{x}_1={}^t[4,4,1]$，$\boldsymbol{x}_2={}^t[3,0,0]$，$\boldsymbol{x}_3={}^t[0,2,0]$ とすれば $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{x}_1+\theta\boldsymbol{x}_2+\theta^2\boldsymbol{x}_3$ であり，

$$A\boldsymbol{v}_1=A\boldsymbol{x}_1+\theta A\boldsymbol{x}_2+\theta^2A\boldsymbol{x}_3=\theta\boldsymbol{x}_1+\theta^2\boldsymbol{x}_2+\theta^3\boldsymbol{x}_3=-\boldsymbol{x}_3+\theta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_3)+\theta^2\boldsymbol{x}_2$$

$$\therefore\quad A(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

が成立する．ここに現れる表現行列は $\Phi_A(t)$ のコンパニオン行列である． □