【問題】 行列 A と B を以下のように定める：

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) B が正則行列か否かを判定し，正則行列ならば B の逆行列 B^{-1} を求めよ．さらに行列式 $\det(A+B)$ の値を求めよ．

(2) A と B の積 AB を求め，$AB = BC$ となる 3 次正方行列 C を求めよ．

(3) 正の整数 n に対し A の n 乗 A^n を求めよ．

(2024 電気通信大学情報理工学域)

【解答】(1) E_3 を 3 次単位行列とする．

$$[B|E_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{②-①}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{①-② \\ ③-2②}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{②-③}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

上の計算より B は正則であり，$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ である．

(2) $C = B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(3) $C^n = B^{-1}A^nB$ および $C^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より $A^n = BC^nB^{-1} = \begin{bmatrix} 2^{n+1}-1 & 1-2^n & 0 \\ 2^{n+1}-2 & 2-2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ □

【問題】 p, q を実数とし，$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & p & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ q \\ -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ とする．実数 x, y, z, w に関する連立 1 次方程式

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \qquad \cdots (*)$$

を考える．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 連立 1 次方程式 $(*)$ がただ 1 つの解を持つとき，y を p, q を用いて表せ．

(2) 連立 1 次方程式 $(*)$ が無限個の解を持つための p, q の条件を求めよ．

(3) p, q は (2) の条件を満たすとする．線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき f の核 $\operatorname{Ker} f$ の次元と基底を求めよ．さらに f の像 $\operatorname{Im} f$ の次元を求めよ．

(2024 電気通信大学情報理工学域)

【解答】(1)

$$[A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & q \\ 0 & 1 & p & 1 & -3 \end{array}\right] \underset{\substack{②-① \\ ③-①}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 1 & q-1 \\ 0 & 1 & p & 1 & -3 \end{array}\right] \underset{\substack{①+② \\ ③-2② \\ ④+②}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q-1 \\ 0 & 0 & p+3 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{②\times(-1) \\ \&\ ③\leftrightarrow④}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p+3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q-1 \end{array}\right] \underset{\substack{①-2④ \\ ③-④}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -2q+3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p+3 & 0 & -q-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q-1 \end{array}\right] \qquad (**)$$

$p \neq -3$ のとき

$$\xrightarrow[③\div(p+3)]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -2q+3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -(q+2)/(p+3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q-1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{①-2③ \\ ②+3③}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & (-2pq+3p-4q+13)/(p+3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3(q+2)/(p+3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -(q+2)/(p+3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q-1 \end{array}\right]$$

より $p+3 \neq 0$ ならば一意に解を持ち，$y = -3\dfrac{q+2}{p+3}$ となる．

(別解)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & p & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{②-① \\ ③-①}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & p & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 1 & p & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{②-③}{=} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 6-p & 0 \\ 1 & p & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 6-p \end{vmatrix} = p+3$$

より $p \neq -3$ ならば $(*)$ は一意に解を持つ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & q & 5 & 3 \\ 0 & -3 & p & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{②-① \\ ③-①}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & q-1 & 6 & 1 \\ 0 & -3 & p & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ q-1 & 6 & 1 \\ -3 & p & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{②-③}{=} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ q+2 & 6-p & 0 \\ -3 & p & 1 \end{vmatrix} = -3(q+2)$$

と Cramer の公式より $y = -3\dfrac{q+2}{p+3}$

※ (1) に限るとき，出題の形式からすると Cramer の公式を用いる方が望ましい．

(2) $p+3=0$ のとき，$[A|\boldsymbol{b}]$ の変形 $(**)$ の続きは

$$(**) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -2q+3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q-1 \end{array}\right] \xrightarrow[③\leftrightarrow④]{} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -2q+3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q-2 \end{array}\right]$$

$q \neq -2$ ならば $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$ となり $(*)$ は解を持たない． 一方，$q=-2$ のときは $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}] < 4$ となり解は任意定数を含む． 従って $(*)$ が無限個の解を持つための必要十分条件は $p=-3$，$q=-2$ となる事である．

(3) (2) の変形の結果より

・ $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} x+2z=0 \\ y-3z=0 \\ w=0 \end{cases}$ ． 従って $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ が $\operatorname{Ker} f$ の基底となり，特に $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

・ $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4]$ と列ベクトルに分割するとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4\}$ が $\operatorname{Im} f$ の基底になり，特に $\operatorname{rank} f\ (= \dim \operatorname{Im} f) = 3$.

□

【問題】 行列 A と B を以下のように定める：

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $A+B$ の階数 $\mathrm{rank}(A+B)$ を求めよ．さらに行列式 $\det(A+B)$ の値を求めよ．

(2) 正の整数 n に対し A^n と B^n を求めよ．

(3) AB と BA を求めよ．さらに正の整数 n に対し $(A+B)^n$ を求めよ．

(2023 電気通信大学情報理工学域)

【解答】(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $A+B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

$$A+B \underset{\substack{①-2② \\ ③+2②}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{①+③ \\ ②-2③}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{①\to③ \\ ②\to① \\ ③\to②}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より $\mathrm{rank}(A+B) = 2$, $|A+B| = 0$.

(2) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = A$ より $A^n = A$. $B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} = 2B$ より $B^n = 2^{n-1}B$.

(3) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$, $BA = O$ (零行列).

$$(A+B)^2 = A + AB + 2B, \quad (A+B)^3 = A + 3AB + 2^2B, \quad (A+B)^4 = A + 7AB + 2^3B, \quad \ldots$$

より $(A+B)^n = A + (2^{n-1}-1)AB + 2^{n-1}B$ $(n = 1, 2, \ldots)$ という形だと予想される．実際，$n=1$ のときは正しく，$n-1$ まで正しいとすると上の計算より

$$\begin{aligned} (A+B)^n = (A+B)^{n-1}(A+B) &= (A + (2^{n-2}-1)AB + 2^{n-2}B)(A+B) \\ &= A^2 + AB + (2^{n-2}-1)AB^2 + 2^{n-2}B^2 \\ &= A + (2^{n-1}-1)AB + 2^{n-1}B \end{aligned}$$

となり n の場合も正しい事が確かめられた．従って帰納法より

$$\begin{aligned} (A+B)^n =& A + (2^{n-1}-1)AB + 2^{n-1}B \\ =& \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cdot 2^{n-1}-2 & 4\cdot 2^{n-1}-4 & 2\cdot 2^{n-1}-2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\cdot 2^{n-1}+2 & -4\cdot 2^{n-1}+4 & -2\cdot 2^{n-1}+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2\cdot 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2\cdot 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ -2^{n-1} & -2\cdot 2^{n-1} & -2^{n-1} \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} 3\cdot 2^{n-1}-1 & 6\cdot 2^{n-1}-3 & 3\cdot 2^{n-1}-2 \\ 2^{n-1} & 2\cdot 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ -3\cdot 2^{n-1}+1 & -6\cdot 2^{n-1}+3 & -3\cdot 2^{n-1}+2 \end{bmatrix} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

(別解) $(A+B)^n$ のみを求めるのならば対角化をすればよい．

$$\phi_{A+B}(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -3 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ 2 & 3 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 0 & t \\ -1 & t-2 & -1 \\ 2 & 3 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ -1 & t-2 & 0 \\ 2 & 3 & t-1 \end{vmatrix} = t(t-1)(t-2)$$

$A - 0E_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $t=0$ に属する固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ がとれる．

$A - E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $t=1$ に属する固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ がとれる．

$A - 2E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $t=2$ に属する固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ がとれる．

以上の計算より $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad (P^{-1}\frac{1}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -6 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix})$ とすれば

$$A^n = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^{n-1} - 1 & 6 \cdot 2^{n-1} - 3 & 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \\ 2^{n-1} & 2 \cdot 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ -3 \cdot 2^{n-1} + 1 & -6 \cdot 2^{n-1} + 3 & -3 \cdot 2^{n-1} + 2 \end{bmatrix}$$

□

【問題】 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 V と $\mathbb{R}^3$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ を

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \quad \begin{matrix} 2x+3y-z+5w=0 \\ -3x+y-4z+9w=0 \end{matrix} \right\}, \qquad \boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と定め，$W = \{c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) V の基底と次元を求めよ．

(2) $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in W$ となるための p, q, r に関する条件を求めよ．

(3) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & \alpha & \beta \\ 4 & -1 & \beta & \alpha \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \ \ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ と定める．$f(V) \subset W$ が成り立つとき，α, β の値を求めよ．

(2023 電気通信大学情報理工学域)

【解答】(1)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & -4 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[②+2①]{} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & -6 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow[①-2②]{} \begin{bmatrix} 0 & -11 & 11 & -33 \\ 1 & 7 & -6 & 19 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[①\div(-11)]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & -6 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow[②-7①]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[①\leftrightarrow②]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

簡約化の結果より $\boldsymbol{x} \in V \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+z-2w=0 \\ y-z+3w=0 \end{cases}$． よって $\left\{ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は V の基底であり，従って $\dim V = 2$.

(2) W は $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分空間だから $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in W \quad \Leftrightarrow \quad ap+b+cr=0$ となる方程式 $ax+by+cz=0$ があり，これは連立 1 次方程式 $\begin{cases} a-b+2c=0 \\ 2a+3b+c=0 \end{cases}$ を導く．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[②-2①]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[5①]{} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 10 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[①+②]{} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} 5a+7c=0 \\ 5b-3c=0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意})$$

従って p, q, r に対し $7p-3q-5r=0$ となる事が W に属する為の必要十分条件となる．

(3) (1) で求めた基底を用いれば (2) の判定法より

$$f(V) \subset W \quad \Leftrightarrow \quad f(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} \alpha-4 \\ \beta-5 \\ -2 \end{bmatrix},\ f(\boldsymbol{x}_2) = \begin{bmatrix} \beta+9 \\ \alpha+11 \\ 3 \end{bmatrix} \in V$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 7(\alpha-4)-3(\beta-5)-5(-2) = 3\alpha-7\beta+3=0 \\ 7(\beta+9)-3(\alpha+11)-5\cdot 3 = -3\alpha+7\beta+15=0 \end{cases}$$

この連立 1 次方程式を解けば $\alpha = -\dfrac{3}{5},\ \beta = -\dfrac{12}{5}$. □

【問題】 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を以下で定義する．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-3y+6z+4w \\ -3x+3y-8z-4w \\ 2x+3y-3z-4w \\ -5x+6y-15z-8w \end{bmatrix}$$

(1)　f の核 $\operatorname{Ker} f$ の次元と基底を求めよ．

次に 4 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ を用いて，線形写像 $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}\quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．

(2)　g の像 $\operatorname{Im} g$ の次元と基底を求めよ．

(3)　共通部分 $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$ の基底を求めよ．

(2022 電気通信大学情報理工学域)

【解答】(1) $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & 4 \\ -3 & 3 & -8 & -4 \\ 2 & 3 & -3 & -4 \\ -5 & 6 & -15 & -8 \end{bmatrix}$ とすれば，$f(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}\quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ と表される．B を簡約化[*2]すると

$$B \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{x} = {}^t[x, y, z, w] \in\in \mathbb{R}^4$ について，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ y - (5/3)z - (4/3)w = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ (5/3)z + (4/3)w \\ z \\ w \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (z = 3s, w = 3t \text{ とおく}) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{b}_1 = {}^t[-3, 5, 3, 0]$，$\boldsymbol{b}_2 = {}^t[0, 4, 0, 3]$ と置けば $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ は $\operatorname{Ker} f$ の基底であり，$\operatorname{Ker} f$ は 2 次元となる．

(2)　A を簡約化すると

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/7 & -11/7 \\ 0 & 1 & 10/7 & 5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

この結果より $\boldsymbol{a}_1 = {}^t[2, 1, -2, 5]$，$\boldsymbol{a}_2 = {}^t[3, -2, -3, 4]$ と置けば $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は $\operatorname{Im} g$ の基底であり，$\operatorname{Im} g$ は 2 次元となる．

(3)　(1)(2) のベクトルを並べた行列を $C = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]$ とし，C を簡約化すると

$$C \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

となるので，部分空間 $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$ の次元は 3．次元公式と (1)(2) の結果より

$$\dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g) = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} g - \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g), \qquad \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

C の簡約化の結果より $\boldsymbol{b}_2 = 3\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1$ と表される事がわかる． そこで $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 \in \operatorname{Ker} f$ と置けば $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 \in \operatorname{Im} g$．$\dim \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g = 1$ だったから，$\{\boldsymbol{c}\}$ が $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$ の基底になる． □

[*2] ”簡約化” ＝ ” 行基本変形 ”

【問題】 3 次正方行列 $M = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -10 & 8 & -4 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ を考える.

(1) M の固有値を全て求め，更に最小の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

次に $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ と線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える．基底 $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列が M であるとする.

(2) $f(\boldsymbol{a}_1)$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ.

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ を考える． 基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列が対角行列となっているとする． このような $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を用いて一組求めよ.

(2022 電気通信大学情報理工学域)

【解答】(1) $|\lambda E_3 - M| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -3 & 2 \\ 10 & \lambda-8 & 4 \\ 5 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$ より M の固有値は 1, 2 (重複度 2).

$$M - 1 \cdot E_3 = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -10 & 7 & -4 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$M - 2 \cdot E_3 = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -2 \\ -10 & 6 & -4 \\ -5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より固有値 1 に対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ がとれる． また，固有値 2 に対応する (1 次独立な) 固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ がとれる.

(2) 仮定より

$$(f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3)) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)M = (-3\boldsymbol{a}_1 - 10\boldsymbol{a}_2 - 5\boldsymbol{a}_3, 3\boldsymbol{a}_1 + 8\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3, -2\boldsymbol{a}_1 - 4\boldsymbol{a}_2).$$

特に $f(\boldsymbol{a}_1) = -3\boldsymbol{a}_1 - 10\boldsymbol{a}_2 - 5\boldsymbol{a}_3$ である.

(3) $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の固有ベクトルから成る基底であり， $P = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ は正則， かつ $P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ となる．ここで

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)P = (\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, 3\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2, -\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_3)$$

と置けば,

$$\begin{aligned}(f(\boldsymbol{b}_1), f(\boldsymbol{b}_2), f(\boldsymbol{b}_3)) =& (f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3))P = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)MP \\ =& (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)PP^{-1}MP = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

したがって $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ に関する表現行列は対角行列になる. □

※ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を線形写像とし，$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ を $\mathbb{R}^3$ の基底とする．$A = (a_{ij})$ がこの基底に関する f の表現行列だとすると,

$$f(\boldsymbol{v}_j) = a_{1j}\boldsymbol{a}_1 + a_{2j}\boldsymbol{a}_2 + a_{3j}\boldsymbol{a}_3 \ = \ (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{bmatrix} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad (f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3)) =& \left((\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \right) \\ =& (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

従って $(f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3)) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)A$ となる.