

【問題】 a を複素数とし

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & a-1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおく. さらに \mathbb{C}^5 の部分ベクトル空間 V_1, V_2, V_3 を以下のように定める.

$$V_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^5 \mid A_1 \mathbf{x} = \mathbf{0}\}, \quad V_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^5 \mid A_2 \mathbf{x} = \mathbf{0}\}, \quad V_3 = \{\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

- (1) A_1 の階数 (rank) を求めよ.
 (2) $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \mathbb{C}^5$ となる a を求めよ.

(H28 東大数理科学研究科数理科学専攻)

【解答】 (1) \longrightarrow により行基本変形を表す.

$$A_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a-1 & a-1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a & a^2-a \end{pmatrix} \cdots (*)$$

$a \neq 0, 1$ のとき

$$(*) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = 0 \text{ のとき } (*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{一方, } a = 1 \text{ のとき } (*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{以上の簡約化の結果より } a \neq 0, 1$$

ならば $\text{rank}(A_1) = 4$, $a = 0, 1$ ならば $\text{rank}(A_1) = 3$ となる.

(2) $a \neq 0, 1$ のとき, (1) の簡約化の結果より $V_1 = \mathbb{C}\mathbf{x}_{11}$ ($\mathbf{x}_{11} = {}^t(1, 0, 0, -1, 1)$). また A_2 に対し

$$A_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore V_2 = \mathbb{C}\mathbf{x}_{21} \quad \left(\mathbf{x}_{21} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

このとき $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ は高々 4 次元だから, \mathbb{C}^5 とは一致しない.

$a = 0$ のとき, $V_1 = \mathbb{C}\mathbf{x}_{11} \oplus \mathbb{C}\mathbf{x}_{12}$, $\mathbf{x}_{11} = {}^t(1, 0, -2, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{12} = {}^t(0, 0, 0, -1, 1)$. また

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $V_2 = \mathbb{C}\mathbf{x}_{21} \oplus \mathbb{C}\mathbf{x}_{22}$ $\mathbf{x}_{21} = {}^t(-1, 0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{22} = {}^t(0, 0, 1, 0, 0)$. このとき

$$(\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

第 2 行が零ベクトルとなる事から, この行列の階数は 4 以下. 従って $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ は 4 次元以下となる.

$a = 1$ のとき, $V_1 = \mathbb{C}\mathbf{x}_{11} \oplus \mathbb{C}\mathbf{x}_{12}$, $\mathbf{x}_{11} = {}^t(-1, 0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{12} = {}^t(0, 0, 0, 0, 1)$. また

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $V_2 = \mathbb{C}\mathbf{x}_{21} \oplus \mathbb{C}\mathbf{x}_{22} \oplus \mathbb{C}\mathbf{x}_{23}$ ($\mathbf{x}_{21} = {}^t(-1, 0, -1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{22} = {}^t(0, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{x}_{23} = {}^t(0, 0, -1, 0, 1)$).

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_{23}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

これより $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ は 5 次元, 従って \mathbb{C}^5 と一致する. 故に等式が成立するのは $a = 1$ のとき.

□

〈雑感〉 基本変形だけで解ける基本的な問題. 定数が意味有り気に配置されているが...

【問題】 \mathbb{R} で実数体を表し、 n を正の整数とする。 n 次元ベクトル全体のなす \mathbb{R} 線型空間 \mathbb{R}^n を V で表し、 V^\vee で V の双対空間を表す。 実 n 次正方行列全体のなす \mathbb{R} 線型空間 $M_n(\mathbb{R})$ から V の線型自己準同型全体のなす \mathbb{R} 線型空間 $\text{End}(V)$ への同型写像

$$F: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{End}(V)$$

を、行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ とベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ に対し $F(A)(v) = Av$ で定める。 \mathbb{R} 上のテンソル積からの同型写像

$$G: V^\vee \otimes V \rightarrow \text{End}(V)$$

を、 $f \in V^\vee$ 、 $w \in V$ と $v \in \mathbb{R}^n$ に対し $G(f \otimes w)(v) = f(v)w$ で定める。

(1) 線型写像

$$E: V^\vee \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$$

を、 $f \in V^\vee$ 、 $w \in V$ に対し $E(f \otimes w) = f(w)$ で定め、 $1 \leq i, j \leq n$ に対し (i, j) 成分だけが 1 で他の成分は 0 である行列を E_{ij} で表す。 合成写像

$$E \circ G^{-1} \circ F: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

の $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ での値を求めよ。

(2) 線型写像 $f \in \text{End}(V)$ の双対写像を $f^\vee \in \text{End}(V^\vee)$ で表し、線型写像

$$H: \text{End}(V) \otimes \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V^\vee \otimes V)$$

を、 $f, g \in \text{End}(V)$ に対し $H(f \otimes g) = f^\vee \otimes g$ で定める。 同型写像

$$F^*: \text{End}(\text{End}(V)) \rightarrow \text{End}(M_n(\mathbb{R})),$$

$$G_*: \text{End}(V^\vee \otimes V) \rightarrow \text{End}(\text{End}(V))$$

を $F^*(f) = F^{-1} \circ f \circ F$ 、 $G_*(g) = G \circ g \circ G^{-1}$ で定める。 行列 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対し合成写像

$$F^* \circ G_* \circ H \circ (F \otimes F): M_n(\mathbb{R}) \otimes M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{End}(M_n(\mathbb{R}))$$

の $A \otimes B$ での値を $f_{A,B} \in \text{End}(M_n(\mathbb{R}))$ とするとき、行列 $X \in M_n(\mathbb{R})$ に対し $f_{A,B}(X)$ を行列の積で表せ。

(H27 東大数理学部研究科数理学専攻)

【解答】 V を n 次元列ベクトル空間と同一視するとき、その双対空間 V^\vee は n 次元行ベクトル空間と同一視できる事に注意する。 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を n 次元基本列ベクトルの全体、 $\{f_1, \dots, f_n\}$ を n 次元基本行ベクトルの全体とする。それぞれ V, V^\vee の基底であり、特に後者は前者の双対基底、 $\{f_i \otimes e_j\}_{1 \leq i, j \leq n}$ は $V^\vee \otimes V$ の基底となる。

(1) 任意の $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \in V$ に対し $F(E_{ij})(v) = {}^t[0, \dots, \overset{j}{v_j}, \dots, 0] = v_j e_i$ であり、一方、

$$G(f_j \otimes e_i)(v) = \begin{pmatrix} [0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, 0] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \end{pmatrix} e_i = v_j e_i$$

であるから $F(E_{ij}) = G(f_j \otimes e_i)$ 。従って $G^{-1} \circ F(E_{ij}) = f_j \otimes e_i$ が成立。よって

$$E \circ G^{-1} \circ F(E_{ij}) = E(f_j \otimes e_i) = f_j \cdot e_i = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ は Kronecker の delta 記号}).$$

(2) $H \cdot (F \times F)(A \otimes B) = F(A)^\vee \otimes F(B)$ である。 $A = [a_{ij}]$ 、 $B = [b_{ij}]$ とすると $F(A)^\vee(f_j)(e_k) = f_j(F(A)(e_k)) = a_{jk}$ より $F(A)^\vee(f_j) = \sum_{k=1}^n a_{jk} f_k$ であり、一方、 $F(B)(e_i) = \sum_{\ell=1}^n b_{\ell i} e_\ell$ だから

$$H \cdot (F \times F)(A \otimes B)(f_j \otimes e_i) = F(A)^\vee \otimes F(B)(f_j \otimes e_i) = F(A)^\vee(f_j) \otimes F(B)(e_i) = \sum_{k, \ell=1}^n a_{jk} b_{\ell i} f_k \otimes e_\ell$$

となる。これと (1) の計算より、 $X = \sum_{i, j=1}^n x_{ij} E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ に対し

$$\begin{aligned} f_{A,B}(X) &= \sum_{i, j=1}^n x_{ij} F^{-1} \cdot G \cdot (F(A)^\vee \otimes F(B)) \cdot G^{-1} \cdot F(E_{ij}) \\ &= \sum_{i, j=1}^n \sum_{k, \ell=1}^n x_{ij} a_{jk} b_{\ell i} F^{-1} \cdot G(f_k \otimes e_\ell) = \sum_{k, \ell=1}^n \left(\sum_{i, j=1}^n b_{\ell i} x_{ij} a_{jk} \right) E_{\ell k} \quad \therefore f_{A,B}(X) = BXA. \end{aligned}$$

□

【問題】 x を変数とする複素係数多項式全体のなす複素ベクトル空間を $\mathbb{C}[x]$ とし、3次以下の多項式全体がなす線形部分空間を V とする。射影 $P: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ を

$$P(f(x)) = \text{“}f(x) \text{ を } x^4 \text{ で割った剰余”} \quad (f(x) \in \mathbb{C}[x])$$

で定める。さらに a を複素数とし、写像 $T: V \rightarrow \mathbb{C}[x]$ を

$$(Tf)(x) = P(f(x^2 - a^2)) \quad (f(x) \in V)$$

で定める。以下の問に答えよ。

- (1) T が V の線形変換となることを示せ。
- (2) V の基底 $E = \{1, x, x^2, x^3\}$ に対して、 T の E に関する表現行列を求めよ。
- (3) T の階数を求めよ。また T の核 $\text{Ker} T = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$ の基底を一組求めよ。
- (4) T が複素数の範囲で対角化可能であるための必要十分条件を a で表せ。

(H27 東大数理学部研究科数理学専攻)

【解答】 (1) $f(x) = a_0 + \dots + a_3x^3 \in V$ に対し

$$\begin{aligned} f(x^2 - a^2) &= a_0 + a_1(x^2 - a^2) + a_2(x^2 - a^2)^2 + a_3(x^2 - a^2)^3 \\ &= a_0 + a_1(x^2 - a^2) + a_2(x^4 - 2a^2x^2 + a^4) + a_3(x^6 - 3a^2x^4 + 3a^4x^2 - a^6) \\ &= a_0 - a_1a^2 + a_2a^4 - a_3a^6 + (a_1 - 2a_2a^2 + 3a_3a^4)x^2 + (a_2 - 3a_3a^2)x^4 + a_3x^6 \end{aligned}$$

$$\therefore (Tf)(x) = P(f(x^2 - a^2)) = a_0 - a_1a^2 + a_2a^4 - a_3a^6 + (a_1 - 2a_2a^2 + 3a_3a^4)x^2$$

だから $g(x) = b_0 + \dots + b_3x^3 \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し

$$\begin{aligned} (T(\alpha f + \beta g))(x) &= (\alpha a_0 + \beta b_0) - (\alpha a_1 + \beta b_1)a^2 + (\alpha a_2 + \beta b_2)a^4 - (\alpha a_3 + \beta b_3)a^6 \\ &\quad + ((\alpha a_1 + \beta b_1) - 2(\alpha a_2 + \beta b_2)a^2 + 3(\alpha a_3 + \beta b_3)a^4)x^2 \\ &= \alpha\{(a_0 - a_1a^2 + a_2a^4 - a_3a^6) + (a_1 - 2a_2a^2 + 3a_3a^4)x^2\} \\ &\quad + \beta\{(b_0 - b_1a^2 + b_2a^4 - b_3a^6) + (b_1 - 2b_2a^2 + 3b_3a^4)x^2\} \\ &= (\alpha(Tf) + \beta(Tg))(x) \end{aligned}$$

より T は V 上の線形変換である。

(2) T の E に関する表現行列を $[T]$ とする。(1) の計算より

$$T(1, x, x^2, x^3) = (1, x, x^2, x^3) \begin{bmatrix} 1 & -a^2 & a^4 & -a^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a^2 & 3a^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore [T] = \begin{bmatrix} 1 & -a^2 & a^4 & -a^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a^2 & 3a^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) $[T]$ を行基本変形すれば

$$[T] \xrightarrow{\textcircled{1} + a^2 \times \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a^4 & 2a^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a^2 & 3a^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a^4 & 2a^6 \\ 0 & 1 & -2a^2 & 3a^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と簡約化されるので、この結果より $\text{rank } T = \underline{2}$ であり、 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ に対し

$$f \in \text{Ker } T \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} a^4 \\ 2a^4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2a^6 \\ -3a^6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

だから $f_1(x) = a^4 + 2a^4x + x^2$, $f_2(x) = -2a^6 - 3a^6x + x^3$ とすれば、 $\{f_1, f_2\}$ が $\text{Ker } T$ の基底となる。

(4) 基本変形 (特に行, 列の入れ替え) より

$$\begin{aligned}
 [T] - \omega E_4 &= \begin{bmatrix} 1 - \omega & -a^2 & a^4 & -a^6 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a^2 - \omega & 3a^4 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ -a^2 & -a^6 & 1 - \omega & a^4 \\ 1 & 3a^4 & 0 & -2a^2 - \omega \end{bmatrix} \\
 &\longrightarrow \begin{bmatrix} -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ -a^2 & -a^6 & a^4 & 1 - \omega \\ 1 & 3a^4 & -2a^2 - \omega & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 1 & 3a^4 & -2a^2 - \omega & 0 \\ -a^2 & -a^6 & a^4 & 1 - \omega \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

と変形すれば T の特性多項式 $\Phi_T(\omega)$ は $\omega^2(\omega - 1)(\omega + 2a^2)$ である事が分かる. 一方, 変形後の行列の i 行 j 列を除いた 3 次小行列式 d_{ij} は

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= -\omega(\omega + 2a^2)(\omega - 1), & d_{13} &= -\omega(\omega - 1), & d_{14} &= a^2\omega(\omega + a^2), \\
 d_{22} &= -\omega(\omega + 2a^2)(\omega - 1), & d_{23} &= 3a^4\omega(\omega - 1), & d_{24} &= a^6\omega(\omega - 3a^2 - 2a^4), \\
 d_{33} &= -\omega^2(\omega - 1), & d_{34} &= a^4\omega^2, & d_{44} &= -\omega^2(\omega + 2a^2)
 \end{aligned}$$

より $n - 1$ 次行列式因子 ω . 従って T の最小多項式 $m_T(\omega)$ は $m_T(\omega) = \omega(\omega - 1)(\omega + 2a^2)$ となる. (有限次元線形空間上の) 線形変換が対角化可能である為の必要十分条件は最小多項式が重根を持たない事だから, T が対角化可能である為には $a \neq 0, \pm\sqrt{-2}/2$ となる事が必要十分条件となる. \square

【問題】 A を $n \times n$ の実対称行列, $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ とする. 以下の問いに答えよ.

I. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を \mathbf{x} について解く事と, $\frac{1}{2}\mathbf{x}^\perp A\mathbf{x} - \mathbf{x}^\perp \mathbf{b}$ の停留値を求める事が同じである事を示せ. ここで \mathbf{x}, \mathbf{b} は n 次元ベクトル, A, \mathbf{b} は既知であり, \mathbf{x}^\perp は \mathbf{x} の転置とする.

II. $C = D^{-1}BD = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$ を満たす対角行列 C と 3×3 の直交行列 D を求めよ. ただし $c_1 \geq c_2 \geq c_3$,

D の 1 行目のすべての成分を正とする.

III. k を正の整数とし, $\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix} = B^k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k}$ を求めよ.

IV. 実数 y_1, y_2, y_3 について, 次の関数

$$f(y_1, y_2, y_3) = \frac{7y_1^2 + 8y_2^2 + 6y_3^2 + 4y_1(y_2 + y_3)}{4y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2} \quad (1)$$

の最小値を求める事を考える. ただし $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \neq 0$ とする. II で求めた D により $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ として

定まる $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ を用いて $f(y_1, y_2, y_3)$ を表し, 最小値を求めよ.

(H23 東大工学研究科電気電子専攻)

【解答】 I. $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\perp A\mathbf{x} - \mathbf{x}^\perp \mathbf{b} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j - \sum_{i=1}^n b_i x_i$ と置く. また \mathbf{a}_k を A の第 k 行とする. A は対称行列だから

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} a_{kj} x_j + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} a_{ik} x_i + a_{kk} x_k - b_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j - b_k = \mathbf{a}_k \mathbf{x} - b_k \quad (k=1, \dots, n)$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial (x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \mathbf{x} - b_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \mathbf{x} - b_n \end{bmatrix} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}.$$

よって \mathbf{x} が f の停留点 $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial (x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ となる.

II. $\begin{vmatrix} t-6 & -2 & -2 \\ -2 & t-7 & 0 \\ -2 & 0 & t-5 \end{vmatrix} = t^3 - 18t^2 + 99t - 162 = (t-3)(t-6)(t-9)$ より C の固有値は 3, 6, 9. また簡約化

$$B - 3E_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B - 6E_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B - 9E_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の結果より, 固有値 3, 6, 9 の固有ベクトルとしてそれぞれ $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ がとれる. これらを正規化して並べた行列を

$D = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{3} & -2/3 \\ 2/3 & -1/\sqrt{3} & 1/3 \\ 1/3 & 1/\sqrt{3} & 2/3 \end{bmatrix}$ とすれば D は条件を満たす直交行列であり, $D^{-1}BD = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ となる.

III. II の結果より

$$\begin{aligned} B^k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= DC^k D^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \cdot 9^{k-1} + 2 \cdot 6^{k-1} + 4 \cdot 3^{k-2} & 4 \cdot 9^{k-1} - 2 \cdot 6^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-2} & 3 \cdot 9^{k-1} + 2 \cdot 6^{k-1} - 4 \cdot 3^{k-2} \\ 4 \cdot 9^{k-1} - 2 \cdot 6^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-2} & 4 \cdot 9^{k-1} + 2 \cdot 6^{k-1} + 3^{k-2} & 2 \cdot 9^{k-1} - 2 \cdot 6^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-2} \\ 3 \cdot 9^{k-1} + 2 \cdot 6^{k-1} - 4 \cdot 3^{k-2} & 3 \cdot 9^{k-1} - 2 \cdot 6^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-2} & \frac{9^{k-1}}{2} + 2 \cdot 6^{k-1} + 4 \cdot 3^{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

従って $a_k = 12 \cdot 9^{k-1} + 2 \cdot 6^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1}$, $b_k = 12 \cdot 9^{k-1} - 2 \cdot 6^{k-1} - 3^{k-1}$.

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{12 \cdot 9^{k-1} + 2 \cdot 6^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1}}{12 \cdot 9^{k-1} - 2 \cdot 6^{k-1} - 3^{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{12 + 2 \cdot \left(\frac{6}{9}\right)^{k-1} + 2 \cdot \left(\frac{3}{9}\right)^{k-1}}{12 - 2 \cdot \left(\frac{6}{9}\right)^{k-1} - \left(\frac{3}{9}\right)^{k-1}} = 1.$$

IV. $X_i = z_i / \|\mathbf{z}\|$ ($i = 1, 2, 3$) とする. $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$ より

$$\begin{aligned} f &= \frac{{}^t \mathbf{y} B \mathbf{y}}{4 {}^t \mathbf{y} E_3 \mathbf{y}} = \frac{{}^t \mathbf{z}^t D B D \mathbf{z}}{4 {}^t \mathbf{z}^t D D \mathbf{z}} = \frac{9}{4} \frac{z_1^2}{\|\mathbf{z}\|^2} + \frac{6}{4} \frac{z_2^2}{\|\mathbf{z}\|^2} + \frac{3}{4} \frac{z_3^2}{\|\mathbf{z}\|^2} \\ &= \frac{9}{4} X_1^2 + \frac{6}{4} X_2^2 + \frac{3}{4} X_3^2 = \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{4}\right) X_1^2 + \left(\frac{6}{4} - \frac{3}{4}\right) X_2^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} X_1^2 + \frac{3}{4} X_2^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となるから, f は $X_1 = X_2 = 0$, $z_1 = z_2 = 0$, 即ち $y_1 = -3c$, $y_2 = c$, $y_3 = 4c$ ($c \neq 0$) のとき最小値 $3/4$ をとる. □