

【問題】  $V$  と  $W$  を複素数体上の有限次元ベクトル空間とし、 $f: V \rightarrow V, g: W \rightarrow W$  をそれぞれ線形変換とする。さらに  $f$  と  $g$  は同じ固有値を持たないとする。線形写像  $\varphi: V \rightarrow W$  が条件  $\varphi \cdot f = g \cdot \varphi$  を満たしているとき、 $\varphi = 0$  となる事を示せ。

(H20 京都大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 任意の  $\alpha \in \mathbb{C}$  に対する  $f, g$  の固有空間、一般固有空間をそれぞれ

$$V(f, \alpha) = \{v \in V \mid f(v) = \alpha v\}, \quad V_0(f, \alpha) = \{v \in V \mid (f - \alpha 1_V)^m(v) = 0 \ (m \gg 0)\}$$

$$W(g, \alpha) = \{w \in W \mid g(w) = \alpha w\}, \quad W_0(g, \alpha) = \{w \in W \mid (g - \alpha 1_W)^m(w) = 0 \ (m \gg 0)\}$$

と置く。  $V(f, \alpha) \subset V_0(f, \alpha), W(g, \alpha) \subset W_0(g, \alpha)$  であり、 $V_0(f, \alpha) \neq \{0\}$  ならば  $V(f, \alpha) \neq \{0\}$  だから、 $V_0(f, \alpha) \neq \{0\}$  ならば  $\alpha$  は  $f$  の固有値となる。  $g$  についても同様。

また、仮定より  $g \cdot \varphi - \alpha \varphi = \varphi \cdot f - \alpha \varphi, (g - \alpha 1_W) \cdot \varphi = \varphi \cdot (f - \alpha 1_V)$  だから、 $(f - \alpha 1_V)^m(v) = 0 \ (m > 0)$  ならば

$$(g - \alpha 1_W)^m \cdot \varphi(v) = \varphi \cdot (f - \alpha 1_V)^m(v) = 0$$

となり  $\varphi(V_0(f, \alpha)) \subset W_0(g, \alpha)$ 。よって  $\varphi(V_0(f, \alpha)) \neq \{0\}$  ならば  $W(g, \alpha) \neq 0$  となり  $\alpha$  は  $g$  の固有値となるが、これは  $f, g$  が共通の固有値を持たない事に反する。故に  $\varphi(V_0(f, \alpha)) = 0$  である。

$V$  の任意の元はある  $\alpha \in \mathbb{C}$  に対する一般固有空間  $V_0(f, \alpha)$  に属するから、上の議論より  $\varphi(v) \in \varphi(V_0(f, \alpha)) = \{0\}$ 。従って  $\varphi(v) = 0, \varphi = 0$  となる。 □

【問題】  $V$  を有限次元の複素ベクトル空間とし、 $V$  を実ベクトル空間と見做したものを  $V_{\mathbb{R}}$  とする。  $V_{\mathbb{R}}$  の任意の一つの  $\mathbb{R}$  上の部分空間  $W$  を考える。  $V$  の  $\mathbb{C}$  上の部分空間のうちで  $W$  に含まれる最大のもの、  $W$  を含む最小のものをそれぞれ  $W_1, W_2$  とする。 このとき

$$\dim_{\mathbb{R}} W = \dim_{\mathbb{C}} W_1 + \dim_{\mathbb{C}} W_2$$

が成り立つ事を証明せよ。

(S51 京大大学院理学研究科 数学専攻)

【解答】  $W' = W \cap iW$ ,  $W'' = W + iW$  と置けば  $W'$ ,  $W''$  はそれぞれ  $V_{\mathbb{R}}$  の  $\mathbb{R}$  上の部分空間である。

$x \in W'$  だとすると  $x = ix'$  ( $x' \in W$ ) と表される。 このとき  $a + ib \in \mathbb{C}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) に対し

$$(a + ib)x = ax + ibx = ax - bx' \in W, \quad (a + ib)x = ax + ibx = aix' + bix \in iW$$

より  $(a + ib)x \in W'$  だから  $W'$  は  $V$  の  $\mathbb{C}$  上の部分空間であり、定義より  $W' \subset W_1$  となる。 一方、  $x \in W_1$  ( $\subset W$ ) ならば  $-ix \in W_1 \subset W$  だから  $x = i(-ix) \in iW$ 。 従って  $x \in W \cap iW = W'$ ,  $W_1 = W'$  である。

$x \in W''$  だとすると  $x = x' + ix'' \in W''$  ( $x', x'' \in W$ ) と表される。 このとき  $a + ib \in \mathbb{C}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) に対し

$$(a + ib)x = ax' - bx'' + i(bx' + ax'') \in W + iW = W''$$

だから  $W''$  は  $V$  の  $\mathbb{C}$  上の部分空間となる。  $W_2 \subset W''$  であり、  $W, iW \subset W_2$  だから  $W_2 = W''$  となる。

$\{x_1, \dots, x_{\ell}\}$  を  $W'$  の  $\mathbb{C}$  上の基底とすれば  $\{x_1, \dots, x_{\ell}, ix_1, \dots, ix_{\ell}\}$  は  $W'$  の  $\mathbb{R}$  上の基底となる。 この基底を含む  $W$  の  $\mathbb{R}$  上の基底  $\{x_1, \dots, x_{\ell}, ix_1, \dots, ix_{\ell}, y_1, \dots, y_k\}$  をとる。

$W_2 = W + iW$  より  $W_2$  の任意の元は

$$\begin{aligned} & (a_1x_1 + \dots + a_{\ell}x_{\ell} + b_1ix_1 + \dots + b_{\ell}ix_{\ell} + c_1y_1 + \dots + c_ky_k) \\ & + i(a'_1x_1 + \dots + a'_{\ell}x_{\ell} + b'_1ix_1 + \dots + b'_{\ell}ix_{\ell} + c'_1y_1 + \dots + c'_ky_k) \\ & = \{a_1 - b'_1 + (b_1 + a'_1)i\}x_1 + \dots + \{a_{\ell} - b'_{\ell} + (b_{\ell} + a'_{\ell})i\}x_{\ell} + (c_1 + c'_1i)y_1 + \dots + (c_k + c'_ki)y_k \end{aligned}$$

と表されるから、  $W_2$  は  $\mathbb{C}$  上  $\{x_1, \dots, x_{\ell}, y_1, \dots, y_k\}$  で生成される。

$z_j = a_j + b_ji$ ,  $w_j = c_j + d_ji \in \mathbb{C}$  ( $a_j, b_j, c_j, d_j \in \mathbb{R}$ ) に対して  $z_1x_1 + \dots + z_{\ell}x_{\ell} + w_1y_1 + \dots + w_ky_k = 0$  であるとする

$$a_1x_1 + \dots + a_{\ell}x_{\ell} + b_1ix_1 + \dots + b_{\ell}ix_{\ell} + c_1y_1 + \dots + c_ky_k = -d_1iy_1 - \dots - d_kiy_k \in W \cap iW$$

となるから  $c_1 = \dots = c_k = 0$  かつ  $d_1y_1 + \dots + d_ky_k = -b_1x_1 - \dots - b_{\ell}x_{\ell}$  が成立。  $x_1, \dots, ix_1, \dots, y_k$  は  $\mathbb{R}$  上の基底だから全ての係数は 0 となり、従って  $x_1, \dots, x_{\ell}, y_1, \dots, y_k$  は  $\mathbb{C}$  上 1 次独立である。

以上より  $\{x_1, \dots, x_{\ell}\}$  は  $W_1$  の  $\mathbb{C}$  上の基底、  $\{x_1, \dots, x_{\ell}, ix_1, \dots, ix_{\ell}, y_1, \dots, y_k\}$  は  $W$  の  $\mathbb{R}$  上の基底、  $\{x_1, \dots, x_{\ell}, y_1, \dots, y_k\}$  は  $W_2$  の  $\mathbb{C}$  上の基底となるから

$$\dim_{\mathbb{R}} W = 2\ell + k = \ell + (\ell + k) = \dim_{\mathbb{C}} W_1 + \dim_{\mathbb{C}} W_2$$

□