

【問題】 n 次実正方行列全体の作る \mathbb{R} 上のベクトル空間を V とし, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ を線形写像とする. このとき

(1) V の次元と基底を求めよ.

(2) n 次元実正方行列 A が唯一つ存在して, すべての $X \in V$ に対し $f(X) = \text{tr}(AX)$ を満たす事を証明せよ. さらにすべての $X \in V$ に対し $f(X) = f({}^tX)$ が成立するとき, $A = {}^tA$ である事を示せ.

(H14 東北大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) $1 \leq p, q \leq n$ に対して $E_{pq} = [\delta_{ip}\delta_{jq}]$ (δ_{ij} は Kronecker の delta 記号) とする. 任意の $X \in V$ は

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1q} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pq} & \cdots & x_{pn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nq} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{p,q=1}^n x_{pq} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \sum_{p,q=1}^n x_{pq} E_{pq}$$

と表され, よって $\{E_{pq}\}_{p,q=1,\dots,n}$ は \mathbb{R} 上 V を生成する. また行列の等号の定義より, $\sum_{p,q=1}^n x_{pq} E_{pq} = O$ ならば $x_{pq} = 0$ だから, $\{E_{pq}\}_{p,q=1,\dots,n}$ は \mathbb{R} 上 1 次独立な系. よって $\{E_{pq}\}_{p,q=1,\dots,n}$ は V の \mathbb{R} 上の基底となる.

(2) (i) $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in V$ に対し $\text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$ ($X \in V$) であるとする. $X = E_{ij}$ のとき

$$\text{tr}(AE_{ij}) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \overset{j}{a_{1i}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right) = a_{ji}$$

となるから, これより $A = B$ が導かれる.

(ii) f に対し $A = [a_{ij}], a_{ij} = f(E_{ji})$ とすると上の計算より $\text{tr}(AE_{ij}) = f(E_{ij})$ が成立. $X \mapsto \text{tr}(AX)$ は V から \mathbb{R} への線形写像だから, 任意の $X \in V$ に対し $f(X) = \text{tr}(AX)$ が成立する.

上の (i) (ii) より f に対する $f(X) = \text{tr}(AX)$ ($X \in V$) となる A の一意的な存在が分かる. 更に $f(X) = f({}^tX)$ ($X \in V$) が成立したとする. 上の考察より $A = [a_{ij}]$ について $a_{ij} = f(E_{ji}) = f(E_{ij}) = a_{ji}$ が成立し, 従って ${}^tA = A$ が成立する. \square

