【問題】 V を高々 2 次の実多項式全体からなる $\mathbb{R}[x]$ の線形部分空間とする．実数 p を固定して，$f(x) \in V$ に対し多項式 $Tf(x)$ を

$$Tf(x) = f(px+1)$$

で定める．$f(x)$ に $Tf(x)$ を対応させる写像が V の線形変換である事は認めてよい．この線形変換を T と書く．以下の問いに答えよ．

(1) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列 A を求めよ．
(2) T が単射でないとき p の値を求めよ．
(3) T が単射である場合，(1) の A の Jordan 標準形 J を p の値で場合分けをして求めよ．ただし Jordan 細胞を並べる順序は問わない．

(H29 首都大学東京理工学研究科数理情報)

【解答】 (1) $T(1) = 1,\ T(x) = 1 + px,\ T(x^2) = (px+1)^2 = 1 + 2px + p^2x^2$ より基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列は $\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & p & 2p \\ 0 & 0 & p^2 \end{bmatrix}}$．

(2) $|A| = p^3$ より $\underline{p = 0}$ ならば T は単射ではない．

(3) (2) より $p \neq 0$ である．

(i) $p \neq \pm 1$ の場合，A の固有値 $1, p, p^2$ と相異なるから対角化可能．

$$A - E_3 \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A - pE_3 \to \begin{bmatrix} 1-p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A - p^2E_3 \to \begin{bmatrix} (1-p)^2 & 0 & -1 \\ 0 & 1-p & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & p-1 & 2(p-1) \\ 0 & 0 & (p-1)^2 \end{bmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p^2 \end{bmatrix}$ となる．

(ii) $p = -1$ の場合，$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ だから A の固有多項式は $\phi_A(t) = (t-1)^2(t+1)$．更に

$$(A - E_3)(A + E_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = O$$

より A の最小多項式は $m_A(t) = (t-1)(t+1)$．特に $m_A(t)$ は重根を持たないので A は対角化可能.

$$A - E_3 \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A + E_3 \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ となる．この場合の標準形は (i) の場合に含まれる．

(iii) $p = 1$ の場合，$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ だから A の固有多項式は $\phi_A(t) = (t-1)^3$．更に

$$A - E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A - E_3)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A - E_3)^3 = O$$

より A の最小多項式は $m_A(t) = (t-1)^3$．特に $m_A(t)$ は重根を持ち，A は対角化できない．上の計算より $P = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすれば

$$(A - E_3)\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2, \quad (A - E_3)\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_2, \quad (A - E_3)\boldsymbol{p}_1 = \mathbf{0}, \qquad (A - E_3)P = P \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

従って $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる．

(i) (ii) (iii) の議論を纏めれば，A の Jordan 標準形は次の通り：

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p^2 \end{bmatrix} \ (p \neq 1), \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ (p = 1).$$

□

【問題】 $A_n \quad (n \geq 3)$ は n 次正方行列で，対角成分が 2，$(i, i+1)$ 及び $(i+1, i)$ 成分 $(1 \leq i \leq n-1)$ が -1, 他の成分は全て 0 となるような行列とする．

(1) $\det A_3$，$\det A_4$ を求めよ．
(2) $\det A_{n+2}$ を $\det A_{n+1}$ と $\det A_n$ を用いて表せ．
(3) $\det A_n$ を求めよ．

(H28 首都大学東京理工学研究科数理情報)

【解答】 (1) $\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{4}$．次に $\det A_4$ を第 4 列に関して余因子展開すると

$$\det A_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 2 \det A_3 = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \det A_3 = -3 + 8 = \underline{5}.$$

(2) $\det A_{n+2}$ の第 $n+2$ 列に関する余因子展開より

$$\det A_{n+2} = (-1)(-1)^{n+1+n+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & 0 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2n+4} \det A_{n+1}.$$

右辺第 1 項に現れる $n-1$ 次行列式を第 $n+1$ 行に関し余因子展開すれば $\underline{\det A_{n+2} = -\det A_n + 2 \det A_{n+1}}$.

(3) $a_n = \det A_{n+1} - \det A_n$ と置けば

$$\det A_{n+2} - \det A_{n+1} = \det A_{n+1} - \det A_n, \qquad \therefore \quad a_{n+1} = a_n.$$

(1) の結果より $a_3 = \det A_4 - \det A_3 = 5 - 4 = 1$ だから $a_n = 1 \quad (n = 3, 4, \cdots)$.

$$\det A_n - \det A_3 = \sum_{k=3}^{n-1} (\det A_{k+1} - \det A_k) = n - 3, \qquad \therefore \quad \det A_n = \underline{n+1}.$$

□

【問題】 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 V とベクトル $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4$ を

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r : x+y+z+w=0 \right\}, \qquad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で定める． f は $\mathbb{R}^4$ の線形変換で, 全ての $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ であり， $f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{o}$ であるとする． 以下の問いに答えよ．

(1) V の基底を一組求めよ．
(2) (1) で求めた V の基底に $\boldsymbol{w}$ を付け加えたものを $\mathcal{B}$ とする． $\mathcal{B}$ が $\mathbb{R}^4$ の基底である事を示せ．
(3) (2) の基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列を求めよ．
(4) $\mathbb{R}^4$ の標準基底 $\mathcal{B}_0 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ に関する f の表現行列を求めよ．

(H28 首都大学東京理工学研究科数理情報)

【解答】 (1) $\boldsymbol{v} = {}^t[x, y, z, w] \in V$ について $x = -y-z-w$ より

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -w \\ 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (y = c_1, z = c_2, w = c_3)$$

より $\boldsymbol{b}_1 = {}^t[-1, 1, 0, 0]$, $\boldsymbol{b}_2 = {}^t[-1, 0, 1, 0]$, $\boldsymbol{b}_3 = {}^t[-1, 0, 0, 1]$ とすれば $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ が V の基底となる．

(2) $\mathcal{B}$ に属すベクトルを並べた行列式は

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{w}| &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \end{aligned}$$

となるから $\mathcal{B}$ は $\mathbb{R}^4$ の基底となる．

(3) $f(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{b}_i \quad (i = 1, 2, 3)$， かつ $f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{o}$ だから f の $\mathcal{B}$ に関する表現行列は $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(4) f の標準基底 $\mathcal{B}_0$ に関する表現行列を B, また $\mathcal{B}_0$ から $\mathcal{B}$ への変換行列を P (即ち $(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_4)P$) とする．

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_4) &= f((\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{w})P^{-1}) = f(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{w})P^{-1} \\ &= (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{w})AP^{-1} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_4)PAP^{-1} \end{aligned}$$

より $PAP^{-1} = B$ となる．

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad B = PAP^{-1} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}.$$

$\square$

【問題】 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値を全て求めよ. それぞれの固有空間の基底を一組ずつ求めよ.

(2) A の Jordan 標準形を求めよ.

(3) A の最小多項式を求めよ. それが最小多項式である事も証明せよ.

(4) $A^6 - 34A^4 + 96A^3 - 60A^2$ を計算せよ.

(H28 首都大学東京理工学研究科数理情報)

【解答】 (1) A の固有多項式は

$$\phi_A(t) = \begin{vmatrix} t-5 & -2 & -4 \\ 4 & t-3 & 8 \\ 2 & 1 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 2t-2 \\ 4 & t-3 & 8 \\ 2 & 1 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 2 & 1 & t+1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 2 & 1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-3)^2$$

となるから, 固有値は $\underline{1,\ 3\ (重根)}$.

$$A - E_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & -8 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A - 3E_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -4 & 0 & -8 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より固有値 1 に対する固有空間の基底として $\underline{\left\{ \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}$, 固有値 3 に対する固有空間の基底として $\underline{\left\{ \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$ がとれる.

(2) 連立一次方程式 $(A - 3E_3)\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2$ を解くと

$$[A - 3E_3 | \boldsymbol{p}_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & -8 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ここで $\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とすれば

$$A\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1, \qquad A\boldsymbol{p}_2 = 3\boldsymbol{p}_2, \qquad A\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 + 3\boldsymbol{p}_3$$

となる. 従って $P = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3]$ と置けば A の Jordan 標準形は $\underline{P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$ となる.

(3) 固有多項式の形より, A の最小多項式 $m_A(t)$ は $m_A(t) = (t-1)(t-3)^a \quad (a = 1, 2)$ という形になる. $a = 1$ だとすると A は対角化可能であるが, (2) の結果に反する. 従って $\underline{m_A(t) = (t-1)(t-3)^2}$.

(4) (3) の結果より $m_A(A) = A^3 - 7A^2 + 15A - 9E_3 = O$ となる. $t^6 - 34t^4 + 96t^3 - 60t^2 = (t^3 + 7t^2)m_A(t) + 3t^2$ より

$$A^6 - 34A^4 + 96A^3 - 60A^2 = 3A^2 = \underline{\begin{bmatrix} 27 & 36 & 0 \\ -48 & 27 & -96 \\ -12 & -18 & 3 \end{bmatrix}}.$$

□