

【問題】  $n$  を正の整数とする。  $A$  を成分が全て実数であるような  $n$  次交代行列とする。 さらに  $A$  は正則であると仮定する。 以下、  $\mathbb{R}$  は実数体、  $\mathbb{C}$  は複素数体を表すものとする。

(1)  $n$  は偶数である事を示せ。

(2)  $A$  の固有値の  $\mathbb{C}$  に於ける根はすべて純虚数であることを示せ。

(3)  $B$  を成分が全て実数であるような  $n$  次対称行列であって、  $AB = BA$  をみたすものとする。  $\alpha \in \mathbb{R}$  を  $B$  の固有値とし、 固有値  $\alpha$  に属する  $B$  の固有空間を  $W(B, \alpha) \subset \mathbb{R}^n$  で表す。  $AW(B, \alpha) = \{Av \mid v \in W(B, \alpha)\}$  とするとき、  $AW(B, \alpha) = W(B, \alpha)$  である事を示せ。

(4) (3) の  $B$  について、  $g_B(t)$  を  $B$  の固有多項式とする。 このとき実多項式  $f(t)$  で  $g_B(t) = f(t)^2$  を満たすものが存在する事を示せ。 .

(H29 大阪大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) 仮定より  $\det(A) = \det({}^t A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ ,  $(1 - (-1)^n) \det(A) = 0$ .  $\det(A) \neq 0$  より  $(-1)^n = 1$ , 従って  $n$  は偶数である。

(2)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $\mathbb{C}^n$  上の標準 Hermite 内積とする。  $\alpha$  を  $A$  の固有値、  $v \in \mathbb{C}^n$  を  $\alpha$  に対する固有ベクトルとする。 このとき

$$\alpha \langle v, v \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle v, {}^t Av \rangle = \langle v, -Av \rangle = \langle v, -\alpha v \rangle = -\bar{\alpha} \langle v, v \rangle$$

より  $(\alpha + \bar{\alpha}) \langle v, v \rangle = 0$ .  $\langle v, v \rangle \neq 0$  より  $\alpha + \bar{\alpha} = 0$ , 即ち  $\alpha$  は純虚数である。

(3)  $v \in W(B, \alpha)$  ならば  $BAv = ABv = \alpha Av$  より  $Av \in W(B, \alpha)$ . 従って  $AW(B, \alpha) \subset W(B, \alpha)$  となる。 一方、  $AB = BA$  より  $BA^{-1} = A^{-1}B$  となるから、  $BA^{-1}v = \alpha A^{-1}v$ ,  $A^{-1}v \in W(B, \alpha)$ . 従って  $A^{-1}W(B, \alpha) \subset W(B, \alpha)$ ,  $W(B, \alpha) \subset AW(B, \alpha)$  となる。 故に  $AW(B, \alpha) = W(B, \alpha)$ .

(4)  $B$  は対称だから

$$g_B(t) = (t - \alpha_1)^{n_1} \cdots (t - \alpha_l)^{n_l} \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j), \quad n_i \geq 1)$$

と因数分解され、各  $n_i$  は  $W(B, \alpha_i)$  の次元と一致する。 (3) より  $A, B$  を固有空間  $W(B, \alpha_i)$  に制限したものを  $A_i, B_i$  とすれば  $A_i$  は交代、  $B_i$  は対称。 更に  $A_i$  は再び正則だから、 (1) より  $W(B, \alpha_i)$  は偶数次元となる。 そこで

$$f(t) = (t - \alpha_1)^{n_1/2} \cdots (t - \alpha_l)^{n_l/2}$$

とすれば  $f(t)$  は実係数の多項式であり、  $f(t)^2 = g_B(t)$  となる。 □

【問題】  $n$  を正の整数とする．  $A$  を実数を成分とする  $n$  次正方行列とし，  $\mathbb{R}^n$  から  $\mathbb{R}^n$  への線形写像  $f_A$  を

$$f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

で定める．  $A$  に関する次の 2 つの条件 (i), (ii) を考える． ただし，  $A$  の固有値は複素数の範囲で考えるものとする．

(i)  $f_A(W) \subset W$  となる任意の線形部分空間  $W \subset \mathbb{R}^n$  に対して

$$f_A(W^\perp) \subset W^\perp$$

となる． ただし，  $W^\perp$  は  $\mathbb{R}^n$  の標準内積

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

に関する  $W$  の直交補空間とする．

(ii)  $A$  の固有値はすべて実数である．

以下の問に答えよ．

- (1)  $A$  が対称行列であるとき，  $A$  は条件 (i), (ii) をともに満たすことを示せ．
- (2)  $A$  が条件 (i), (ii) をともに満たすならば，  $A$  は対称行列であることを示せ．

(H28 大阪大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 (1)  $A$  安定な部分空間  $W$  について，  $\mathbf{x} \in W^\perp$  ならば  $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = 0$  ( $\forall \mathbf{y} \in W$ ) だから  $f_A(W^\perp) \subset W^\perp$  となる．

$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = {}^t\mathbf{z} \cdot \overline{\mathbf{w}}$  ( $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\cdot$  は複素共役) を  $\mathbb{C}^n$  上の標準 Hermitian 内積とする． 複素数を成分とする任意の  $n$  次正方行列  $X$  及び  $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$  について  $\langle X\mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{z}, {}^t\overline{X}\mathbf{w} \rangle$  だから， 対称行列  $A$  について  $\langle A\mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{z}, A\mathbf{w} \rangle$  が成立する． ここで  $\alpha$  を  $A$  の固有値，  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  を  $\alpha$  に対する固有ベクトルとすると

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{x} \rangle = \overline{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad \therefore (\alpha - \overline{\alpha})(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0.$$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \neq 0$  だから，  $\alpha = \overline{\alpha}$ ， 即ち  $\alpha$  は実数となる．

(2)  $n$  に関する帰納法により，  $A$  の固有ベクトルから成る正規直交基底が存在する事を示す．  $n = 1$  のときは自明．  $n > 1$  だとする．  $A$  の固有値  $\alpha_1$  に対する固有ベクトル  $\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$  ( $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ) をとる．  $A(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + iA\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{x} + i\alpha_1\mathbf{y}$  より  $A\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}$ ,  $A\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{y}$  が成立．  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  の少なくとも一方は  $\mathbf{0}$  ではないから，  $\mathbb{R}^n$  内に  $\alpha_1$  に関する固有ベクトルがとれる事になる． そこで  $A\mathbf{x}_1 = \alpha_1\mathbf{x}_1$  ( $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = 1$ ) となる  $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$  をとり，  $\mathbf{x}_1$  の生成する 1 次元部分空間を  $W \subset \mathbb{R}^n$  とする． 仮定より標準内積に関する  $W$  の直交補空間  $W^\perp \subset \mathbb{R}^n$  は  $A$  安定な  $\mathbb{R}^n$  の  $n - 1$  次元部分空間となる．

・  $A$  の  $W^\perp$  への制限を  $A'$  とする．  $A'$  の固有値は  $A$  の固有値でもあるから仮定より実数となる．  
 ・ 内積を  $W^\perp$  に制限したものを  $(\cdot, \cdot)'$  とすれば，  $(\cdot, \cdot)'$  は再び  $W^\perp$  の内積になる．  $A'$  安定な  $W^\perp$  の部分空間  $W'$  に対し，  $W''$  を  $W'$  の  $(\cdot, \cdot)'$  に関する  $W^\perp$  内の直交補空間とすれば，  $W''$  は部分空間  $W + W'$  の標準内積に関する直交補空間である．  $W + W'$  は  $A$  安定だから，  $W''$  も  $A$  安定， 従って  $A'$  安定となる．

以上より  $A'$  は  $A$  と同等の仮定を満たすから， 帰納法の仮定より  $A'\mathbf{x}_i = \alpha_i\mathbf{x}_i$  ( $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ) となる  $W^\perp$  の正規直交基底  $\{\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  が存在する．  $\mathbf{x}_1$  は  $\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  に直交するから，  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  は  $\mathbb{R}^n$  の正規直交基底となる． このとき行列  $T = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  は  $n$  次直交行列であり，  $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  とすれば

$$AT = TD, \quad A = TD^tT, \quad {}^tA = {}^t(TD^tT) = {}^t({}^tT) {}^tD {}^tT = TD^tD = A$$

となり， 従って  $A$  は対称行列となる． □

【問題】  $A$  を  $n$  次正方行列とする ( $n \geq 2$ ). その  $(i, j)$  成分を  $a_{ij}$  と書く. すなわち  $A = (a_{ij})$  である. またこの行列  $A$  の  $(i, j)$  余因子を  $\Delta_{ij}$  として, これを  $(i, j)$  成分に持つ行列を  $X = (\Delta_{ij})$  と定める.

- (1) 行列  $A$  が逆行列をもつとき, その行列式  $\det A$  は 0 でない事を示せ.
- (2)  $A^t X = (\det A)I$  を示せ. ただし  ${}^t X$  は  $X$  の転置行列で  $I$  は単位行列を表す.
- (3)  $\det A \neq 0$  ならば  $A$  の逆行列が存在する事を示せ.

(H22 大阪大学基礎工学研究科 数学科学専攻)

【解答】 (1)  $\det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}) = \det I = 1$  より  $\det A \neq 0$  となる.

(2)  $A$  の第  $i$  行を  $\mathbf{a}_i$  で表す. また  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  を行基本ベクトルとし,  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$  と置く. 行列式の多重線形性, 交代性より

$$\begin{aligned} {}_i > \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} &= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^n x_j \begin{vmatrix} \mathbf{e}_j \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n x_j (-1)^{j-1+i-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1j} & a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+1j} & a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n x_j \Delta_{ij} \end{aligned}$$

ここで  $\mathbf{x}$  に  $A$  の第  $k$  行を代入すれば  $\sum_{j=1}^n a_{kj} \Delta_{ij} = (\det A) \delta_{ik}$ , 即ち  $A^t X = (\det A)I$  となる.

(3) (2) の結果より  $\det A \neq 0$  ならば  $A \left( \frac{1}{\det A} {}^t X \right) = I$  となる. (2) で行と列の役割を入れ替えて議論すれば  ${}^t X A = (\det A)I$  となる事が分かり,  $\det A \neq 0$  ならば  $\left( \frac{1}{\det A} {}^t X \right) A = I$  となる. 従って  $\det A \neq 0$  ならば  $A$  の逆行列が存在し,  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t X$  により与えられる. □

【問題】  $E$  を  $n$  次元ベクトル空間,  $\sigma_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を  $E$  の  $0$  ではない  $1$  次変換で

$$\sigma_i \sigma_j = 0 \quad (1 \leq i \neq j \leq n), \quad \sigma_i^2 = \sigma_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

をみたすものとするとき, 次の事を示せ.

(a)  $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$  は恒等変換である.

(ii)  $\{\sigma'_i\}_{i=1, \dots, n}$  を  $\{\sigma_i\}$  と同様な性質を持つ  $E$  上の一次変換とすれば,  $E$  の自己同型  $\alpha$  で

$$\sigma'_i = \alpha^{-1} \sigma_i \alpha \quad (i = 1, \dots, n)$$

を満たすものがある.

(S55 大阪大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 (a)  $E_i = \text{Im } \sigma_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) とする.  $\sigma_i \neq 0$  だから  $\dim E_i \geq 1$  である.  $\mathbf{x}_i \in E_i$  に対し  $\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$  だとする. 各  $i$  に対し  $\mathbf{x}_i = \sigma_i(\mathbf{y}_i)$  ( $\mathbf{y}_i \in E$ ) と表されるから,

$$\mathbf{0} = \sigma_i(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n) = \sigma_i \sigma_1(\mathbf{y}_1) + \dots + \sigma_i^2(\mathbf{y}_i) + \dots + \sigma_i \sigma_n(\mathbf{y}_n) = \mathbf{0} + \dots + \sigma_i(\mathbf{y}_i) + \dots + \mathbf{0} = \mathbf{x}_i,$$

即ち,  $E_1 + \dots + E_n$  は直和である.  $n \geq \dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_n) = \dim E_1 + \dots + \dim E_n \geq n$ , より  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ . 任意の  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n$  ( $\mathbf{x}_i \in E_i$ ) について

$$(\sigma_1 + \dots + \sigma_n)(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n \sigma_i(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i = \mathbf{x}$$

より  $\sigma_1 + \dots + \sigma_n = id_E$  となる.

(2) (1) および (1) と同様の議論より  $\text{rank } \sigma_i = \text{rank } \sigma'_i = 1$  だから零ベクトル以外の  $\mathbf{x}_i \in \text{Im } \sigma_i$ ,  $\mathbf{x}'_i \in \text{Im } \sigma'_i$  をとれば  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ ,  $\{\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_n\}$  はそれぞれ  $E$  の基底であり,

$$\sigma_i \left( \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{x}_j \right) = c_i \mathbf{x}_i, \quad \sigma'_i \left( \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{x}'_j \right) = c_i \mathbf{x}'_i$$

が成立する. この基底を用いて  $E$  の自己同型射  $\alpha$  を

$$\alpha : E \rightarrow E, \quad \alpha \left( \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{x}'_j \right) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{x}_j$$

により定義する. このとき任意の  $1 \leq i \leq n$ ,  $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{x}'_j \in E$  に対し

$$\alpha^{-1} \sigma_i \alpha(\mathbf{x}) = \alpha^{-1} \sigma_i \left( \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{x}_j \right) = \alpha^{-1}(c_i \mathbf{x}_i) = c_i \mathbf{x}'_i = \sigma'_i(\mathbf{x})$$

だから  $\alpha^{-1} \sigma_i \alpha = \sigma'_i$  となる. □