【問題】 V は線形空間，$f, g : V \to V$ は線形写像，$f \cdot g = g \cdot f$ とする．

(1) $\operatorname{Ker}(f \cdot g) \supset \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$ を示せ．
(2) $g(\operatorname{Ker} f) \subset \operatorname{Ker} f$ を示せ．

(2) より，g の $\operatorname{Ker} f$ 上への制限は線形写像 $\tilde{g} : \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} f$ を定める．

(3) $\tilde{g}$ が単射であるとき，$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$ を示せ．
(4) $\tilde{g}$ が全射であるとき，$\operatorname{Ker}(f \cdot g) = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$ を示せ．

(H30 名古屋大学大学院多元数理研究科)

【解答】 (1) $x + y \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$ $(x \in \operatorname{Ker} f,\ y \in \operatorname{Ker} g)$ のとき，f, g の可換性より

$$(f \cdot g)(x + y) = (f \cdot g)(x) + (f \cdot g)(y) = g(f(x)) + f(g(y)) = 0 + 0 = 0.$$

従って $x + y \in \operatorname{Ker}(f \cdot g)$，$\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f \cdot g)$ となる．

(2) $x \in \operatorname{Ker} f$ ならば $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0$ より $g(x) \in \operatorname{Ker} f$．従って $g(\operatorname{Ker} f) \subset \operatorname{Ker} f$ である．

(3) $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$ ならば $\tilde{g}(x) = g(x) = 0$．$\tilde{g}$ の単射性より $x = 0$．従って $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$ となる．

(4) $z \in \operatorname{Ker}(f \cdot g)$ とする．$f(g(z)) = 0$ より $g(z) \in \operatorname{Ker} f$．$\tilde{g}$ の全射性より $\tilde{g}(x) = g(z)$ となる $x \in \operatorname{Ker} f$ が存在する．$y = z - x$ と置くとき，$g(y) = g(z - x) = g(z) - \tilde{g}(x) = 0$ だから $y \in \operatorname{Ker} g$．従って $z = x + y \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$，よって $\operatorname{Ker}(f \cdot g) \subset \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$ となる．逆向きの包含関係は (1) で得られているので，$\operatorname{Ker}(f \cdot g) = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$ となる． $\square$

【問題】 実変数 x についての 3 次以下の実係数多項式の成す実線形空間を V とする．p, q, r は実数とし，線形写像 $T : V \to V$ を

$$T(f(x)) = pf(x) + (qx + r)f'(x)$$

により定義する．以下の問いに答えよ．

(1) V の基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ に関する T の表現行列を求めよ．
(2) $\operatorname{Ker} T$ の次元が 0 となる為の p, q, r の必要十分条件を求めよ．
(3) $\operatorname{Im} T$ の次元が 3 となるための p, q, r の必要十分条件を求めよ．

(H30 名古屋大学大学院多元数理研究科)

【解答】 (1) $T(1) = p$, $T(x) = r + (p+q)x$, $T(x^2) = 2rx + (p+2q)x^2$, $T(x^3) = 3rx^2 + (p+3q)x^3$ より T の $\{1, x, x^2, x^3\}$ に関する表現行列 $[T]$ は

$$\underline{[T] = \begin{bmatrix} p & r & 0 & 0 \\ 0 & p+q & 2r & 0 \\ 0 & 0 & p+2q & 3r \\ 0 & 0 & 0 & p+3q \end{bmatrix}}.$$

(2) $\operatorname{Ker} T = \{0\} \iff \det[T] \neq 0$. (1) の結果と併せて $\underline{p(p+q)(p+2q)(p+3q) \neq 0}$ が求める条件である．

(3) $\operatorname{rank} T = 4 - \dim \operatorname{Ker} T$ より $\operatorname{rank} T = 3$ である為には $\det[T] = 0$ でなければならない事に注意する．

(i) $q = 0$ のとき，$\det[T] = 0$ より $p = 0$ となるから，$\operatorname{rank} T = 3 \iff r \neq 0$ となる．
(ii) $q \neq 0$ のとき，$p, p+q, p+2q, p+3q$ は全て異なる．以下，$[i]$ により第 i 行，(j) により第 j 列を表す．また↓により「左の変形後に次の変形を施す」事を表す事にする．

$p = 0$ のとき，$q \neq 0$ より基本変形により

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & q & 2r & 0 \\ 0 & 0 & 2q & 3r \\ 0 & 0 & 0 & 3q \end{bmatrix} \underset{\substack{[4]\div 3q\ \downarrow \\ [3]-3r\times[4]}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & q & 2r & 0 \\ 0 & 0 & 2q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{[3]\div 2q\ \downarrow \\ [2]-2r\times[3]}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{[2]\div q\ \downarrow \\ [1]-r\times[2]\ \downarrow \\ \text{適当にシフト}}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と変形でき，したがって $\operatorname{rank} T = 3$ となる．
$p + q = 0$ のとき，$q \neq 0$ より基本変形により

$$\begin{bmatrix} -q & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2r & 0 \\ 0 & 0 & q & 3r \\ 0 & 0 & 0 & 2q \end{bmatrix} \underset{\substack{[4]\div 2q\ \downarrow \\ [3]-3r\times[4]}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -q & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2r & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{[3]\div q\ \downarrow \\ [2]-2r\times[3]}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -q & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{(1)\div(-q)\ \downarrow \\ (2)-r\times(1)\ \downarrow \\ \text{適当にシフト}}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と変形でき，したがって $\operatorname{rank} T = 3$ となる．
$p + 2q = 0$ のとき，$q \neq 0$ より基本変形により

$$\begin{bmatrix} -2q & r & 0 & 0 \\ 0 & -q & 2r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3r \\ 0 & 0 & 0 & q \end{bmatrix} \underset{\substack{[4]\div q\ \downarrow \\ [3]-3r\times[4]\ \downarrow}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -2q & r & 0 & 0 \\ 0 & -q & 2r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{(1)\div(-2q)\ \downarrow \\ (2)-r\times(1)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q & 2r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{(2)\div(-q)\ \downarrow \\ (3)-2r\times(2)\ \downarrow \\ \text{適当にシフト}}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と変形でき，したがって $\operatorname{rank} T = 3$ となる．
$p + 3q = 0$ のとき，$q \neq 0$ より基本変形により

$$\begin{bmatrix} -3q & r & 0 & 0 \\ 0 & -2q & 2r & 0 \\ 0 & 0 & -q & 3r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{(1)\div(-3q)\ \downarrow \\ (2)-r\times(1)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2q & 2r & 0 \\ 0 & 0 & -q & 3r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{(2)\div(-2q)\ \downarrow \\ (3)-2r\times(1)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & 3r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{(3)\div(-q)\ \downarrow \\ (4)-3r\times(3)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と変形でき，したがって $\operatorname{rank} T = 3$ となる．

以上より $\operatorname{rank} T = 3$ となる為の必要十分条件は $\underline{p = q = 0 \text{ かつ } r \neq 0}$ または $\underline{p(p+q)(p+2q)(p+3q) = 0 \text{ かつ } q \neq 0}$ となる． □

【問題】 V, W を $\mathbb{R}$ 上の有限次元線形空間とし，$f : V \to W$ を線形写像とする．以下の問いに答えよ．

(1) 等式

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f$$

が成り立つ事を次の (i), (ii) を示す事により示せ．

(i) $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を $v_1, \ldots, v_k$ とし，$\mathrm{Im}\, f$ の基底を $w_1, \ldots, w_m$ とする．更に

$$f(v_{k+i}) = w_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

となる $v_{k+1}, \cdots, v_{k+m} \in V$ をとる．このとき $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}$ は一次独立である事を示せ．

(ii) $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}$ は V の基底になる事を示せ．

(2) U を $\mathbb{R}$ 上の有限次元線形空間とし，$g : W \to U$ を線形写像とする．このとき合成写像 $g \cdot f$ について

$$\dim \mathrm{Im}(g \cdot f) \geq \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Im}\, g - \dim W$$

が成り立つ事を示せ．

(H29 名古屋大学大学院多元数理研究科)

【解答】 (1) (i) $a_i \in \mathbb{R}$ に対し $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \ldots + a_{k+m} v_{k+m} = 0$ であるとする．

$$\begin{aligned} f(a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \ldots + a_{k+m} v_{k+m}) &= a_{k+1} f(v_{k+1}) + \ldots + a_{k+m} f(v_{k+m}) \\ &= a_{k+1} w_{k+1} + \ldots + a_{k+m} w_{k+m} = 0 \end{aligned}$$

と $\{w_{k+1}, \ldots, w_{k+m}\}$ の一次独立性より $a_{k+1} = \cdots = a_{k+m} = 0$．このとき $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0$ となるから $\{v_1, \ldots, v_k\}$ の一次独立性より $a_1 = \cdots = a_k = 0$．従って $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}$ は一次独立である．

(1) (ii) 任意の $v \in V$ をとる．$f(v) = a_{k+1} w_1 + \cdots + a_{k+m} w_m$ であるとし，$v' = a_{k+1} v_{k+1} + \cdots + a_{k+m} v_{k+m}$ と置く．このとき

$$\begin{aligned} f(v - v') =& f(v) - (a_{k+1} f(v_{k+1}) + \cdots + a_{k+m} f(v_{k+m})) \\ =& f(v) - (a_{k+1} w_{k+1} + \cdots + a_{k+m} w_{k+m}) = f(v) - f(v) = 0 \end{aligned}$$

より $v - v' \in \mathrm{Ker}\, f$．従って $v - v' = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$ と表される．これより $v = a_1 v_1 + \cdots + a_{k+m} v_{k+m}$ となり，故に $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}\}$ は V を生成する．(i) の結果と併せて $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}\}$ は V の基底となる．

(2) g の $\mathrm{Im}\, f$ 上への制限を $\tilde{g}$ とする．$\mathrm{Im}\, \tilde{g} = \mathrm{Im}(g \cdot f)$ と (1) の結果より $\dim \mathrm{Im}(g \cdot f) = \dim \mathrm{Im}\, f - \dim \mathrm{Ker}\, \tilde{g}$ が成立．更に $\mathrm{Ker}\, \tilde{g} \subset \mathrm{Ker}\, g$ と再び (1) の結果より $\dim \mathrm{Ker}\, \tilde{g} \leq \dim \mathrm{Ker}\, g = \dim W - \dim \mathrm{Im}\, g$ だから，

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Im}(g \cdot f) =& \dim \mathrm{Im}\, f - \dim \mathrm{Ker}\, \tilde{g} \\ \geq& \dim \mathrm{Im}\, f - \dim \mathrm{Ker}\, g = \dim \mathrm{Im}\, f - (\dim W - \dim \mathrm{Im}\, g). \end{aligned}$$

従って $\dim \mathrm{Im}(g \cdot f) \geq \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Im}\, g - \dim W$ となる． $\square$

【問題】 A と B を対角化可能な n 次複素正方行列とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) A と B がある共通の行列により対角化できるならば $AB = BA$ が成り立つ事を示せ．

以下，$AB = BA$ が成り立つと仮定し，A の固有値 α に対する固有空間を $W(A, \alpha)$ と書く．

(2) 任意の $v \in W(A, \alpha)$ に対し，$Bv \in W(A, \alpha)$ が成り立つ事を示せ．

(3)

(i) B の固有ベクトルからなる $W(A, \alpha)$ の基底が存在する事を示せ．

(ii) (i) を用いて A と B はある共通の行列により対角化できる事を示せ．

(H29 名古屋大学大学院多元数理研究科)

【解答】 (1) n 次正則行列 P により $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ が共に対角行列になったとする．任意の対角行列は互いに可換だから

$$P^{-1}AP \cdot P^{-1}BP = P^{-1}BP \cdot P^{-1}AP, \qquad P^{-1}ABP = P^{-1}BAP.$$

両辺に右より P，左より P^{-1} をかければ $AB = BA$ となる．

(2) $ABv = BAv = B(\alpha v) = \alpha Bv$ より $Bv \in W(A, \alpha)$ である．

(3) (i) $W = W(A, \alpha)$ と置く．(2) より W は B に関して安定．B の最小多項式を $m_B(t)$ とすると $m_B(B|_W) = m_B(B)|_W = O$ だから $B|_W$ の最小多項式 $m_{B|_W}(t)$ は $m_B(t)$ を割り切る．B は対角化可能だから $m_B(t)$ は重根を持たず，従って $m_{B|_W}(t)$ も重根を持たない．これより $B|_W$ は対角化可能であり，従って B の固有ベクトルからなる $W(A, \alpha)$ の基底が存在する．

(ii) $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ $(\alpha_i \neq \alpha_j)$ を A の固有値の全体とし，各固有空間 $W(A, \alpha_i)$ について B の固有ベクトルからなる基底 $\{\boldsymbol{v}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{im_i}\}$ をとる．$\mathbb{C}^n = W(A, \alpha_1) \oplus \cdots \oplus W(A, \alpha_r)$ より $\{\boldsymbol{v}_{11}, \cdots, \boldsymbol{v}_{1m_1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{r1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{rm_r}\}$ が $\mathbb{C}^n$ の基底となる事が分かる．ここで $P = [\boldsymbol{v}_{11}, \cdots, \boldsymbol{v}_{1m_1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{r1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{rm_r}]$ と置けば P は正則行列であり，基底の取り方より $\boldsymbol{v}_{ij}$ は A, B 共通の固有ベクトルであるから，$P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ は対角行列となる． $\square$

【問題】 V, W を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とする． V の双対空間 V^* を次で定まる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする．

$$V^* \ : V \text{ から } \mathbb{C} \text{ への全ての線形写像の成すベクトル空間.}$$

また線形写像 $f : V \to W$ に対して，線形写像 $f^* : W^* \to V^*$ を次で定める．

$$f^*(h) = h \cdot f \qquad (h \in W^*).$$

以下の問いに答えよ．

(1) V の基底 $e_1, \ldots, e_n$ に対して $e_1^*, \ldots, e_n^* \in V^*$ を条件

$$\text{任意の } i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ に対して } \quad e_i^*(e_j) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{array} \right.$$

を満たすものとする．このとき $e_1^*, \ldots, e_n^*$ は V^* の基底となる事を示せ．

(2) $f : V \to W$ が全射であるならば，f^* は単射である事を示せ．

(3) $f : V \to W$ が単射であるならば，f^* は全射である事を示せ．

(H29 名古屋大学大学院多元数理研究科)

【解答】 (1) $x_i \in \mathbb{C}$ に対し $x_1 e_1^* + \cdots + x_n e_n^* = 0$ だとする． $e_j^*(e_i) = \delta_{ji}$ （δ_{ij} は Kronecker の delta 記号) だから

$$0 = (x_1 e_1^* + \cdots + x_n e_n^*)(e_i) = x_1 \delta_{1i} + \cdots + x_n \delta_{ni} = x_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

だから $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ は一次独立である．次に h を任意の V^* の元とする． $h_i = h(e_i)$ とし $\tilde{h} = h_1 e_1^* + \cdots + h_n e_n^*$ と置けば任意の $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in V$ に対し

$$\tilde{h}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{h}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} h_j e_j^*(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i = \sum_{i=1}^{n} x_i h(e_i) = h(x).$$

従って $h = \tilde{h}$． 即ち $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ は V^* を生成する．以上より $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ は V^* の基底となる．

(2) $h \in W^*$ に対し $f^*(h) = 0$ だとする．任意の $y \in W$ をとる． f は全射だから $y = f(x)$ となる $x \in V$ が存在．このとき $h(y) = h(f(x)) = f^*(h)(x) = 0$ だから $h = 0$． 故に f^* は単射である．

(3) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の基底とし，$w_i = f(v_i)$ とする． $\sum_{i=1}^n x_i w_i = 0$ だとすると $f(\sum_{i=1}^n x_i v_i) = \sum_{i=1}^n x_i w_i = 0$ だから f の単射性より $\sum_{i=1}^n x_i v_i = 0$． 従って $x_1 = \cdots = x_n = 0$ となり $\{v_1, \ldots, v_n\}$ は一次独立となる．これに W の元 $w_{n+1}, \ldots, w_m$ を追加して $\{w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_m\}$ が W の基底となるようにし，この基底に対して (1) で構成した W^* の基底 $\{w_1^*, \ldots, w_m^*\}$ をとる．

任意の $g \in V^*$ をとる． $x_i = g(v_i)$ とし $h = \sum_{i=1}^n x_i w_i^* \in W^*$ とすると

$$f^*(h)(v_i) = h(f(v_i)) = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j^*(w_i) = x_i = g(v_i) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

より $f^*(h) = g$ となる．故に f^* は全射である． $\square$

【問題】 [1] 2 次元ベクトル空間 V を定義域として V を値域とする線形な関数 $\boldsymbol{f} : V \to V$ は

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

に対して，それぞれ

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となる．次の小問に答えよ．

1) 任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V$ に対する $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ を行列を用いて表せ．

2) $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ に対して，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を求める方程式を考える．1) で $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ を表すのに用いた行列は対角行列ではない．$\boldsymbol{x}$ に適当な線形変換を施した $\boldsymbol{y} \in V$ を用いて，この方程式を対角行列を用いた方程式に書き換えよ．

[2] 3 次元ベクトル空間 U 上の任意の $= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U$ に対して，関数

$$p(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$$

が与えられているとする．次の小問に答えよ．

1) $\boldsymbol{x}$ に於ける p の勾配 ∇p を求めよ．

2) $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に於ける p の $\boldsymbol{d} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に対する方向微分係数

$$\frac{dp}{ds}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{s \to 0} \frac{p(\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{d}) - p(\boldsymbol{x}_0)}{s}$$

を求めよ．

3) 2) に於いて，p の等値面に対して p の値が増加する方向に向いた法線を考える．その法線に対する p の方向微分係数を求めよ．

(H29 名古屋大学大学院情報科学研究科複雑系科学専攻)

【解答】 [1] $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすれば

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \begin{pmatrix} {}^{-1}2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2) $\begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \text{ とすれば} \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} c_1 - (3/2)c_2 \\ (1/2)c_2 \end{pmatrix}$$

[2] 1) $\nabla p = (\partial p/\partial x_1, \partial p/\partial x_2, \partial p/\partial x_3) = \underline{(2x_1 + 2x_2, 4x_2 + 2x_1, 2x_3)}$

2) 方向微分は $\boldsymbol{d} \cdot \nabla p(\boldsymbol{x}_0)$ により与えられる．$\nabla p(\boldsymbol{x}_0) = (6, 10, -2)$ より

$$\frac{dp}{ds}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot (-2) = \underline{10}$$

3) $\boldsymbol{n}$ を単位法線ベクトルとし，$\boldsymbol{n}$ 方向の p の方向微分係数を $\partial p/\partial \boldsymbol{n}$ とする．このとき $\boldsymbol{n} = \nabla p/\|\nabla p\|$ より

$$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla p = \frac{1}{\|\nabla p\|}\|\nabla p\|^2 = \sqrt{(2x_1 + 2x_2)^2 + (4x_2 + 2x_1)^2 + (2x_3)^2} = 2\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (2x_2 + x_1)^2 + x_3^2}$$

だから，$\boldsymbol{x}_0$ に於ける方向微分係数は $\partial p/\partial \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_0) = 2\sqrt{3^2 + 5^2 + 1} = \underline{2\sqrt{35}}$． □

【問題】 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を以下で定める．

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\},$$

$$W_2 = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

以下の問に答えよ．

(1) W_1 の基底を一組求めよ．
(2) 和空間 $W_1 + W_2$ の基底を一組求めよ．
(3) 連立一次方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0, \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 + hx_4 = 0 \end{array} \right.$$

の解空間がちょうど W_2 となるような実数の組 a, b, c, d, e, f, g, h を一組求めよ．

(H28 名古屋大学大学院多元数理研究科)

【解答】 (1) W_1 を規定する連立一次方程式の係数行列 A を行基本変形すると

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

変形の結果より連立一次方程式は $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = x_4 \end{array} \right.$ と同値．従って $\underline{\left\{ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$ は W_1 の基底となる．

$\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．$W_1 + W_2$ は $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_4$ により生成される．この 4 つの列ベクトルを並べた行列を行基本変形すると

$$[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

この変形の結果より $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ は一次独立，かつ $\boldsymbol{x}_4 = 3\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3$ となる事が分かり，従って $\underline{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}}$ が $W_1 + W_2$ の基底となる．

(3) W_2 で与えられた列ベクトルを代入する事により求めたい連立一次方程式の係数は連立一次方程式 $\left\{ \begin{array}{l} a + c + d = 0, \\ a + 2b - c + d = 0 \end{array} \right.$ を満たす．この方程式の係数行列 B を行基本変形すると

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

だから，方程式は $\left\{ \begin{array}{l} a = -c - d \\ b = c \end{array} \right.$ と同値．従って $(a, b, c, d) = s(1, -1, -1, 0) + t(1, 0, 0, -1)$ $(s, t \in \mathbb{R})$ となる．これより W_2 を定める方程式は $\underline{\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{array} \right.}$ で与えられる． □

【問題】 複素数を係数とする x についての 2 次以下の多項式全体の成す $\mathbb{C}$ 上の線形空間を V とする．以下の問に答えよ．

(1) 複素数 m に対して V の線形変換 T_m を $T_m(f(x)) = mf(x) - 2f(1)x^2 + f(2)x$ で定めるとき，V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T_m の表現行列を求めよ．

(2) V の線形変換 T_m を (1) で定めたものとするとき，$T_m(f(x)) = 0$ を満たす V の元 $f(x)$ で 0 でないものが存在する m を全て求めよ．また，その各 m に対して $T_m(f(x)) = 0$ となる $f(x)$ を全て求めよ．

(H27 名古屋大学大学院多元数理研究科)

【解答】 (1) $T(1) = m + x - 2x^2$，$T(x) = (m+2)x - 2x^2$，$T(x^2) = 4x + (m-2)x^2$ より T_m の $\{1, x, x^2\}$ に関する表現行列 $[T]$ は

$$[T] = \underline{\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 1 & m+2 & 4 \\ -2 & -2 & m-2 \end{bmatrix}}.$$

(2) $\det[T_m] = m(m^2+4)$ 及び $\operatorname{Ker} T_m \neq \{0\} \Leftrightarrow \det[T_m] = 0$ より $m = \underline{0, \pm 2i}$ (i は虚数単位) のとき $\operatorname{Ker} T_m \neq \{0\}$ となる．$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \operatorname{Ker} T_m$ とする．

$m = 0$ のとき，

$$[T_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より $f(x) \in \operatorname{Ker} T_m \Leftrightarrow x_0 = 2x_2,\ x_1 = -3x_2$，従って $f(x) = c(2 - 3x + x^2)$ $(c \in \mathbb{C})$ となる．

$m = 2i$ のとき，

$$[T_0] = \begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 1 & 2i+2 & 4 \\ -2 & -2 & 2i-2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より $f(x) \in \operatorname{Ker} T_m \Leftrightarrow x_0 = 0,\ x_2 = -(1-i)x_2$，従って $f(x) = c(-(1-i)x + x^2)$ $(c \in \mathbb{C})$ となる．

$m = -2i$ のとき，

$$[T_0] = \begin{bmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 1 & -2i+2 & 4 \\ -2 & -2 & -2i-2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より $f(x) \in \operatorname{Ker} T_m \Leftrightarrow x_0 = 0,\ x_2 = -(1+i)x_2$，従って $f(x) = c(-(1+i)x + x^2)$ $(c \in \mathbb{C})$ となる． $\square$

【問題】 $\lambda,\ \mu$ を異なる複素数とし，3 次の複素正方行列 A は

条件 1：$(A-\lambda I)^2 \neq O,\ A-\mu I \neq O$
条件 2：$(A-\lambda I)^2(A-\mu I) = O$

を満たすとする．ここで I は単位行列，O は零行列である．以下の問に答えよ．

(1) λ と μ は A の固有値である事を示せ. また A の固有値はこれらで尽くされる事を示せ.
(2) $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2 \cap \mathrm{Ker}(A-\mu I) = \{0\}$ を示せ.
(3) 任意の $u \in \mathbb{C}^3$ に対して

$$u - \frac{1}{(\mu-\lambda)^2}(A-\lambda I)^2 u\ \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2$$

である事を示せ.
(4) 直和分解

$$\mathbb{C}^3 = \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2 \oplus \mathrm{Ker}(A-\mu I)$$

が成り立つ事を示せ.

(H26 名古屋大学大学院多元数理研究科)

【解答】 (1) 条件 2 より $|A-\lambda I|^2|A-\mu I| = 0$．$|A-\lambda I| \neq 0$ だとすると $A-\lambda I$ は正則となる．$(A-\lambda I)^2(A-\mu I) = O$ の左から $(A-\lambda I)^{-2}$ を掛けると $A-\mu I = 0$ となり条件 1 に反する．同様に $|A-\mu I| \neq 0$ だとすると $(A-\lambda I)^2 = O$ となりやはり条件 1 に反する．従って $|A-\lambda I| = |A-\mu I| = 0$，即ち λ, μ は A の固有値となる．条件 2 より A の最小多項式 $m_A(t)$ は $(t-lambda)^2(t-\mu)$ を割り切る．$m_A(t) = 0$ の解は A の特性方程式 $|tI-A| = 0$ の解と一致するから，A の固有値は λ, μ に限る.

(2) $x \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2 \cap \mathrm{Ker}(A-\mu I)$ とする．$Ax = \mu x$ かつ $(\mu-\lambda)^2 x = (A-\lambda I)^2 x = 0$ であり，$\lambda \neq \mu$ だから $x = 0$ となる.

(3) 条件 2 より $A(A-\lambda I)^2 = \mu(A-\lambda I)^2$ となるから，任意の $u \in \mathbb{C}^3$ に対し

$$\begin{aligned}
&(A-\lambda I)^2\left(u - \frac{1}{(\mu-\lambda)^2}(A-\lambda I)^2 u\right) = \frac{1}{(\mu-\lambda)^2}((\mu-\lambda)^2 I - (A-\lambda I)^2)(A-\lambda I)^2 u \\
=&\frac{1}{(\mu-\lambda)^2}\{\mu^2(A-\lambda I)^2 u - 2\lambda\mu(A-\lambda I)^2 u + \lambda^2(A-\lambda I)^2 u - (A-\lambda I)^4 u\} \\
=&\frac{1}{(\mu-\lambda)^2}\{A^2(A-\lambda I)^2 u - 2\lambda A(A-\lambda I)^2 u + \lambda^2(A-\lambda I)^2 u - (A-\lambda I)^4 u\} \\
=&\frac{1}{(\mu-\lambda)^2}\{(A^2 - 2\lambda A + \lambda^2 I)(A-\lambda I)^2 u - (A-\lambda I)^4 u\} = 0.
\end{aligned}$$

故に $u - \frac{1}{(\mu-\lambda)^2}(A-\lambda I)^2 u \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2$ である.

(4) 任意の $u \in \mathbb{C}^3$ に対し $(A-\mu I)(A-\lambda I)^2 u = 0$ より $\frac{1}{(\mu-\lambda)^2}(A-\lambda I)^2 u \in \mathrm{Ker}(A-\mu I)$．よって (3) より

$$u \in \frac{1}{(\mu-\lambda)^2}(A-\lambda I)^2 u + \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2 \subset \mathrm{Ker}(A-\mu I) + \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2.$$

これと (2) より $\mathbb{C}^3 = \mathrm{Ker}(A-\mu I) \oplus \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2$ となる. $\square$

【問題】 $n \geq 2$ を整数とし，A を n 次対称行列，$b \in \mathbb{R}^n$ とする．$\mathbb{R}^n$ 上の関数 f を

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

により定める．ただし $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^n$ 上の標準内積を表す．

(1) 点 $x^* \in \mathbb{R}^n$ において f が極値を持つならば，$Ax^* = b$ が成り立つ事を示せ．
(2) A の全ての固有値が正であるとき，f はただ一つの点で最小値を取る事を示せ．

(H25 名古屋大学大学院多元数理研究科)

【解答】 (1) $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ に関し $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ と表されるとする．また $A = [a_{ij}]$，$b = [b_i]$ とすると

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

となる．これを $x_l \quad (l = 1, \ldots, n)$ に関し偏微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial x_l}(x) = \frac{1}{2}\{2a_{ll}x_l + \sum_{i \neq l}(a_{il} + a_{li})x_i\} - b_l = \sum_{i=1}^{n} a_{li}x_i - b_l \qquad (\because\ a_{il} = a_{li})$$

となるから，$f(x^*)$ が極値ならば

$$Ax^* - b = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i^* - b_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i^* - b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\partial f/\partial x_1)(x^*) \\ \vdots \\ (\partial f/\partial x_n)(x^*) \end{bmatrix} = 0,$$

よって $Ax^* = b$ となる．

(2) A が直交行列 $T = [v_1, \cdots, v_n]$ によって ${}^tTAT = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ と対角化されたとする．$x \in \mathbb{R}^n$ を $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i = T\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \cdots, x_n]$，また b を $bx = \sum_{i=1}^n b_i v_i = T\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{b} = {}^t[b_1, \cdots, b_n]$ と表せば

$$f(x) = \frac{1}{2}{}^t\boldsymbol{x}\,{}^tTAT\boldsymbol{x} - \langle b, {}^tTTx\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i x_i^2 - 2b_i x_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i\left(x_i - \frac{b_i}{a_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{2a_i} \geq -\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{2a_i}.$$

$Ax = b$ の解 x^* を $x^* = \sum_{i=1}^n x_i^* v_i = T\boldsymbol{x}^*$ $\boldsymbol{x}^* = {}^t[x_1^*, \cdots, x_n^*]$ とすれば ${}^tTAx^* = {}^tTAT\boldsymbol{x}^* = {}^tTb$,

$$\text{i.e.}\quad \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad \therefore\quad x_i^* = b_i/a_i\ (i = 1, \ldots, n).$$

これより $f(x^*) = -\sum_{i=1}^n (b_i^2/2a_i)$，即ち $f(x^*)$ が最小値となる．また $x \neq x^*$ ならば $\sum_{i=1}^n a_i(x_i - x_i^*)^2 > 0$ となるから f は唯 1 点で最小値をとる事が分かる． □

【問題】 V を有限次元複素線型空間とし，$f : V \to V$, $g : V \to V$ を線型写像とする．更に g は全単射であり，関係式 $g \cdot f \cdot g^{-1} \cdot f = id_V$ が成り立っているものとする．ただし id_V は V の恒等写像とする．以下の問に答えよ．

(1) このとき f も全単射である事を示せ．

(2) λ が f の固有値ならば λ は 0 でなく，λ^{-1} も f の固有値である事を示せ．

(3) $\dim V = 3$ であり，f は固有値 $\mu \neq \pm 1$ をもつものとする．このとき f の Jordan 標準形はどのようになるか答えよ．また f の Jordan 標準形を与える V の基底を一組とり，その基底に関する g の表現行列を決定せよ．

(H24 名古屋大学大学院多元数理研究科)

【解答】 (1) $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ だとすると $\boldsymbol{o} = g \cdot f \cdot g^{-1} \cdot f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ となるから f は単射である．一方，$\boldsymbol{v} \in V$ に対し $g(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ とすると $f(g^{-1}(f(\boldsymbol{w}))) = g^{-1}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}$ となり，従って f は全射．故に f は全単射である．
(2) $f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o})$ となる $\boldsymbol{v} \in V$ が存在する．$\lambda = 0$ だとすると $\mathrm{Ker}\, f \neq \{\boldsymbol{o}\}$ となり f が全単射である事に反する．従って $\lambda \neq 0$.

$$\lambda f(g^{-1}(\boldsymbol{v})) = f(g^{-1}(f(\boldsymbol{v}))) = g^{-1}(\boldsymbol{v}), \qquad \therefore \quad f(g^{-1}(\boldsymbol{v})) = \lambda^{-1} g^{-1}(\boldsymbol{v}).$$

$g^{-1}(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{o}$ より λ^{-1} は f の固有値である．
(3) (2) より $\mu \neq 0$ かつ μ^{-1} は f の固有値であり，μ に対する仮定より $\mu \neq \mu^{-1}$ となる．また ϵ が f の固有値のとき，(2) と $\dim V = 3$ である事より $\epsilon^2 \in \{1, \mu^2\}$ となる．$\epsilon^2 = \mu^2$ だとすると f の Jordan 標準形 J は $J_1 = \begin{bmatrix} \mu & * & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{-1} \end{bmatrix}$ または $J_2 = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{-1} & * \\ 0 & 0 & \mu^{-1} \end{bmatrix}$ ($*$ は 0 か 1) という形になる．$g \cdot f \cdot g^{-1} = f^{-1}$ より f^{-1} の Jordan 標準形は J^{-1} の Jordan 標準形と一致しなければならない．ところが $J = J_1$ ならば J^{-1} の Jordan 標準形の対角成分は μ^{-1}, μ^{-1}, μ, $J = J_2$ ならば J^{-1} の Jordan 標準形の対角成分は μ^{-1}, μ, μ となり J^{-1} の Jordan 標準形は J と共役にはならない．従って $\epsilon \in \{\pm 1\}$，よって f は対角化可能となる．固有値 $\mu, \mu^{-1}, \varepsilon$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ とする．g の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ に関する表現行列を $G = [g_{ij}]$ とする．このとき $g \cdot f^{-1} = f \cdot g$ より

$$\begin{aligned}
\mu^{-1} g_{11}\boldsymbol{v}_1 + \mu^{-1} g_{21}\boldsymbol{v}_2 + \mu^{-1} g_{31}\boldsymbol{v}_3 &= \mu g_{11}\boldsymbol{v}_1 + \mu^{-1} g_{21}\boldsymbol{v}_2 + \varepsilon g_{31}\boldsymbol{v}_3 \\
\mu g_{12}\boldsymbol{v}_1 + \mu g_{22}\boldsymbol{v}_2 + \mu g_{32}\boldsymbol{v}_3 &= \mu g_{12}\boldsymbol{v}_1 + \mu^{-1} g_{22}\boldsymbol{v}_2 + \varepsilon g_{32}\boldsymbol{v}_3 \\
\varepsilon g_{13}\boldsymbol{v}_1 + \varepsilon g_{23}\boldsymbol{v}_2 + \varepsilon g_{33}\boldsymbol{v}_3 &= \mu g_{13}\boldsymbol{v}_1 + \mu^{-1} g_{23}\boldsymbol{v}_2 + \varepsilon g_{33}\boldsymbol{v}_3
\end{aligned}$$

となる．例えば $g_{11} \neq 0$ だとすると $\mu^{-1} = \mu$ となるが，これは $\mu \neq \pm 1$ に反する．このようにして各両辺を比較すれば $G = \begin{bmatrix} 0 & g_{12} & 0 \\ g_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$ $(g_{12}, g_{21}, g_{33} \neq 0)$ となる． □

【問題】 V を有限次元の実ベクトル空間，f を V の線形変換とする．

(1) $\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{\boldsymbol{o}\}$ と $\mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f = V$ が同値であることを示せ．
(2) $\mathrm{Ker}f \subset \mathrm{Ker}f^2 \subset \mathrm{Ker}f^3 \subset \cdots$ および $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Im}f^2 \subset \mathrm{Im}f^3 \subset \cdots$ を示せ．
(3) ある $n > 0$ が存在して $\mathrm{Ker}f^n + \mathrm{Im}f^n = V$ となることを示せ．

(H19 名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

【解答】 (1) 一般に線形変換に関する次元定理より $\dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$ が成立．また部分空間に関する次元定理より $\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = \dim(\mathrm{ker} f + \mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f)$ が成立する．今，$\mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f = V$ だとすると

$$\dim(\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f) = \dim \mathrm{Ker}f + \dim \mathrm{Im}f - \dim(\mathrm{ker}f + \mathrm{Im}f) = \dim V - \dim V = 0$$

より $\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{\boldsymbol{o}\}$ となる．逆に $\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{\boldsymbol{o}\}$ だとすると $\dim(\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f) = 0$ より

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}f + \dim \mathrm{Im}f = \dim(\mathrm{ker}f + \mathrm{Im}f).$$

これと $\mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f \subset V$ より $V = \mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f$ となる．

(2) $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}f^i$ ならば $f^{i+1}(\boldsymbol{v}) = f(f^i(\boldsymbol{v})) = f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$，従って $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}f^{i+1}$ となる．次に $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}f^{i+1}$ だとすると $f^{i+1}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる $\boldsymbol{v} \in V$ が存在する．このとき $\boldsymbol{w} = f^i(f(\boldsymbol{v})) \in \mathrm{Im}f^i$ となり, $\mathrm{Im}f^{i+1} \subset \mathrm{Im}f^i$ となる．

(3) $d = \max\{\dim \mathrm{Ker}f^i : i \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ $(\leq \dim V)$ とし，$d = \dim \mathrm{Ker}f^i$ となる最小の i を n とする．$\boldsymbol{w} \in \mathrm{Ker}f^n \cap \mathrm{Im}f^n$ ならば，$\boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}f^n$ より $\boldsymbol{w} = f^n(\boldsymbol{v})$ となる $\boldsymbol{v} \in V - \{\boldsymbol{o}\}$ がとれる．このとき $f^{2n}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ より $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}f^{2n}$ となるが, $\mathrm{Ker}f^{2n} = \mathrm{Ker}f^n$ より $\boldsymbol{w} = f^n(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$．従って $\mathrm{Ker}f^n \cap \mathrm{Im}f^n = \{\boldsymbol{o}\}$ が成立．(1) より $V = \mathrm{Ker}f^n + \mathrm{Im}f^n$ となる． $\square$

【問題】 V を 2 次実正方行列全体のなす実ベクトル空間とする．$r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\phi_r(A) = A + r({}^tA) \qquad (A \in V)$$

と置く．このとき以下の問に答えよ．

(1) ϕ_r は V から V への線型変換である事を確めよ．
(2) $\operatorname{Ker}\phi_r$ の次元を求めよ．
(3) $\operatorname{Im}\phi_r$ の次元を求めよ．

(H19 名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

【解答】 (1) $a, b \in \mathbb{R}$, $A, B \in V$ に対し

$$\phi_r(aA+bB) = aA + bB + r({}^t(aA+bB)) = aA + bB + r(a{}^tA + b{}^tB) = a(A + r{}^tA) + b(B + r{}^tB) = a\phi_r(A) + b\phi_r(B)$$

より ϕ_r は線型変換である．

(2) (3) $E_{ij} = [\delta_{ki}\delta_{lj}]$ を行列単位とする．$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ は V の $\mathbb{R}$ 上の基底となる．

$$\phi_r(E_{11}) = (1+r)E_{11}, \qquad \phi_r(E_{12}) = E_{12} + rE_{21}, \qquad \phi_r(E_{21}) = E_{21} + rE_{12}, \qquad \phi_r(E_{22}) = (1+r)E_{22}$$

より ϕ_r の $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ に関する表現行列 $[\phi_r]$ は

$$[\phi_r] = \begin{bmatrix} 1+r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+r \end{bmatrix}$$

となる．$\det[\phi_r] = (1+r)^3(1-r)$ より $r \neq \pm 1$ ならば $\operatorname{Ker}[\phi_r] = \{0\}$, $\operatorname{Im}[\phi_r] = V$．従って $\underline{\ \dim\operatorname{Ker}\phi_r = 0,\ \dim\operatorname{Im}\phi_r = 4\ }$.

$r = 1$ のとき，

$$[\phi_1] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より $\operatorname{Ker}\phi_1 = \mathbb{R}(E_{12} - E_{21})$, $\operatorname{Im}\phi_1 = \mathbb{R}E_{11} + \mathbb{R}E_{12} + \mathbb{R}E_{22}$. 従って $\underline{\ \dim\operatorname{Ker}\phi_1 = 1,\ \dim\operatorname{Im}\phi_1 = 3\ }$.

$r = -1$ のとき，

$$[\phi_{-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より $\operatorname{Ker}\phi_{-1} = \mathbb{R}E_{11} + \mathbb{R}(E_{12} + E_{21}) + \mathbb{R}E_{22}$, $\operatorname{Im}\phi_{-1} = \mathbb{R}E_{12}$. 従って $\underline{\ \dim\operatorname{Ker}\phi_{-1} = 3,\ \dim\operatorname{Im}\phi_{-1} = 1\ }$. $\square$

【問題】

n 次の複素正方行列 $A = [a_{ij}]$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とする時,

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

が成立する事を示せ. (名古屋大学大学院)

【解答】 A に対し

$$P^{\dagger}AP = U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (\text{上三角行列})$$

となる unitary 行列 P が存在する. 複素正方行列 X の転置複素共役を $X^{\dagger} = {}^t\overline{X}$ と記すとき,

$$\begin{aligned} AA^{\dagger} \text{ の (i,i) 成分 } &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{a_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \\ UU^{\dagger} \text{ の (i,i) 成分 } &= |\lambda_i|^2 + \sum_{j=i+1}^{n} |u_{ij}|^2 \end{aligned}$$

となるから, $U^{\dagger} = P^{\dagger}A^{\dagger}P$ と併せて

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \mathrm{tr}(AA^{\dagger}) = \mathrm{tr}(P^{\dagger}APP^{\dagger}A^{\dagger}P) = \mathrm{tr}(UU^{\dagger}) = \sum_{i=1}^{n}(|\lambda_i|^2 + \sum_{j=i+1}^{n} |u_{ij}|^2) \geq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2.$$

$\square$