【問題】a を実数とする．3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値と，各固有値に対する固有空間を求めよ．

(2) $B = P^{-1}AP$ を満たす正則行列 P^{-1} が存在するための a の条件を求めよ．

(H28 九州大学数理学府)

【解答】 (1) $\phi_A(t) = |tE_3 - A|$ を A の固有多項式とする．

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} t-4 & -1 & -1 \\ 1 & t-1 & 0 \\ 2 & 1 & t \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & t-1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} t-4 & -1 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-3)$$

より A の固有値は $1, 3$．また各固有値に対し

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} 4-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-1 & 0 \\ -2 & -1 & 0-1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - 3E_3 = \begin{pmatrix} 4-3 & 1 & 1 \\ -1 & 1-3 & 0 \\ -2 & -1 & 0-3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より 1 に対する固有空間は $\boldsymbol{q}_1 = {}^t(0, 1, -1)$ の生成する部分空間，3 に対する固有空間は $\boldsymbol{q}_3 = {}^t(-2, 1, 1)$ の生成する部分空間である．

(2) $P^{-1}AP = B$ となる正則行列 P が存在する為の必要十分条件は A と B の Jordan 標準形は一致する事である．$(A - E)\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_1$ となる $\boldsymbol{q}_2$ として，$\boldsymbol{q}_2 = {}^t(-1, 3, 0)$ がとれる．(1) の $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_3$ と併せて $Q = [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3]$ とすれば A の Jordan 標準形は

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = J_2(1) \oplus J_1(3) \qquad J_2(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_1(3) = 3$$

により与えられる．一方，B の固有多項式は $\phi_B(t) = (t-1)^2(t-3)$ となるから B の Jordan 標準形は $J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(3)$, $J_2(1) \oplus J_1(3)$ の何れかとなる．固有値 3 を持つ Jordan 細胞は $J_1(3)$ と確定しているので，固有値 1 を持つ Jordan 細胞について調べる．

$$B - E_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ a & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & (a+2=0) \\ \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & (a+2 \neq 0) \end{cases}$$

$$(B - E_3)^2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ -a-6 & a+6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (B - E_3)^3 = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -12 & 12 & 0 \\ -2a-12 & 2a+12 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より

$$\text{Jordan 細胞 } J_2(1) \text{ の個数} = \mathrm{rank}(B - E_3) - 2\,\mathrm{rank}(B - E_3)^2 + \mathrm{rank}(B - E_3)^3 = \begin{cases} 1 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 & (a+2=0) \\ 2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 & (a+2 \neq 0) \end{cases}$$

従って $a + 2 \neq 0$ が求める条件である． □

【問題】 実数を成分とする正方行列 B が交代行列，即ち $B = -{}^tB$ を満たすとする．ただし ${}^tB$ は B の転置行列である．さらに $A = B^2$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) A の固有値は，すべて 0 以下の実数になることを示せ．

(2) 0 以外の固有値に対する A の固有空間は偶数次元になることと示せ．

(H21 九州大学数理学府)

【解答】 (1) λ を A の固有値とし，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ を λ に関する A の固有ベクトルとする．$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $\mathbb{C}^n$ の標準 Hermite 内積とするとき，仮定より

$$\begin{aligned}\lambda\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle &= \langle\lambda\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = \langle A\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = {}^t\boldsymbol{v}\,{}^tA\overline{\boldsymbol{v}} \\ &= {}^t\boldsymbol{v}({}^tB)^2\overline{\boldsymbol{v}} = {}^t\boldsymbol{v}({}^tB)(-B)\overline{\boldsymbol{v}} = -\langle B\boldsymbol{v},B\boldsymbol{v}\rangle.\end{aligned}$$

$\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle \neq 0$ より $\lambda = -\langle B\boldsymbol{v},B\boldsymbol{v}\rangle/\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle \leq 0$，即ち 0 以下の実数となる．

(2) 以下，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $\mathbb{R}^n$ に制限した標準内積を $(\cdot,\cdot)$ とする．A の固有値 λ に対する固有空間を V_λ とする．この V_λ が互いに直交する B 安定な 2 次元部分空間の直和となることを示す．

[1] $\boldsymbol{v}_1 \in V_\lambda - \{\boldsymbol{0}\}$ をとる．A, B は可換だから V_λ は B 安定，従って $B\boldsymbol{v}_1 \in V_\lambda$ となる． また $B\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ だとすると，$A\boldsymbol{v}_1 = B(B\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{0}$ となるが，これは $A\boldsymbol{v}_1 = \lambda\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$ に反するから $B\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$ となる．次に $a_1\boldsymbol{v}_1 + b_1B\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ だとする．両辺に B を掛け，前者に a_1，後者に b_1 を掛けて辺々を引けば

$$(a_1^2\boldsymbol{v}_1 + a_1b_1B\boldsymbol{v}_1) - (\lambda b_1^2\boldsymbol{v}_1 + a_1b_1B\boldsymbol{v}_1) = (a_1^2 - \lambda b_1^2)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}.$$

$\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$ より $a_1^2 - \lambda b_1^2 = 0$．$\lambda < 0$ より $a_1 = b_1 = 0$，従って $\boldsymbol{v}_1, B\boldsymbol{v}_1$ は 1 次独立である．ここで $\boldsymbol{v}_1, B\boldsymbol{v}_1$ により生成される V_λ の部分空間を V_1 とする．

[2] 仮に互いに直交する B 安定な V_λ の 2 次元部分空間 $V_1, \cdots, V_s$ がとれたとする．このとき V_λ 於ける $V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ の直交補空間を W_s とすれば，$\boldsymbol{w} \in W_s$ について

$$(B\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) = -(\boldsymbol{w},B\boldsymbol{v}) = 0 \qquad (\forall\ \boldsymbol{v} \in V_1 \oplus \cdots \oplus V_s)$$

となるから W_s も B に関し安定である．

[3] $W_s \neq 0$ ならば $\boldsymbol{v}_{s+1} \in W_s - \{\boldsymbol{0}\}$ がとれる．[1] と同様の議論より $\boldsymbol{v}_{s+1}, B\boldsymbol{v}_{s+1}$ は 1 次独立．この 2 つのベクトルにより生成される部分空間を V_{s+1} とすれば，V_{s+1} は B 安定であり，$V_{s+1} \subset W_s$ より $V_1, \cdots, V_{s+1}$ は互いに直交する．ここで再び [2] の議論に戻る．

[4] $W_s = 0$ ならば $V_\lambda = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$．

V_λ は有限次元だから有限回で [4] に到達する．故に V_λ は偶数次元となる． □

【問題】 単位行列を I とする．n 次直交行列のうち，行列式の値が 1 となるもの全体の集合を $SO(n)$ と書く：

$$SO(n) = \{A \mid A \text{ は実数を成分とする } n \text{ 次の正方行列で } {}^tAA = A^tA = I,\ \det A = 1\}$$

(1) どんな行列 $T \in SO(2)$ に対しても，ある実数 θ が存在して

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

と表される事を示せ．

(2) 行列 $A \in SO(3)$ で，その成分に 0 となるものが一つもないものを具体的に一つ挙げよ．

(3) 行列 $A \in SO(3)$ の固有値の絶対値は 1 である事を示せ．さらにその固有値の少なくとも一つは 1 であることを証明せよ．

(4) 行列 $A, B \in SO(3)$ が，固有値 1 に対する固有ベクトルを共有しているならば $AB = BA$ を満たす事を証明せよ．

(5) 逆に行列 $A, B \in SO(3)$ が $AB = BA$ を満たすならば，固有値 1 に対する固有ベクトルを共有しているか? 正しければ証明し，誤りであるならば反例を挙げよ．

(H16 九州大学数理学府)

【解答】(1) $T = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ とするとき，

$${}^tTT = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+z^2 & xy+zw \\ xy+zw & z^2+w^2 \end{bmatrix}$$

より $T \in SO(2)$ ならば $x^2+z^2 = 1,\ y^2+w^2 = 1,\ xy+zw = 0$ かつ $xw-yz = 1$ でなければならない．前半二式より $x = \cos\theta,\ z = \sin\theta,\ \ y = \cos\eta,\ w = \sin\eta$ となる実数 θ, η が存在する．後半二式より

$$\cos(\eta-\theta) = \cos\theta\cos\eta + \sin\theta\sin\eta = 0, \qquad \sin(\eta-\theta) = \cos\theta\sin\eta - \cos\eta\sin\theta = 1$$

となるから $\eta - \theta = \pi/2$ となる．よって T は実数 θ を用いて

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta+\frac{\pi}{2}) \\ \sin\theta & \sin(\theta+\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

と表される．

(2) $\boldsymbol{v}_1 = {}^t[1,1,1],\ \boldsymbol{v}_2 = {}^t[3,-2,-1],\ \boldsymbol{v}_3 = {}^t[1,4,-5]$ と置く．このとき $\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_3 = 0$ となる事が容易に確かめられる．$\boldsymbol{v}_i$ を正規化したもの並べた行列 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{5}{\sqrt{42}} \end{bmatrix}$ は所望の行列の一つとなる．

(3) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $\mathbb{C}^3$ の標準 Hermite 内積とする．ω を A の固有値，$\boldsymbol{v}$ を ω に対する固有ベクトルとすると

$$|\omega|^2\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = \langle\omega\boldsymbol{v},\omega\boldsymbol{v}\rangle = \langle A\boldsymbol{v},A\boldsymbol{v}\rangle = \langle\boldsymbol{v},{}^tAA\boldsymbol{v}\rangle = \langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle$$

だから $|\omega|^2 = 1,\ |\omega| = 1$ となる．また

$$|E_3 - A| = |{}^t(E_3 - A)| = |E_3 - {}^tA| = |{}^tA||A - E_3| = |A|(-|E_3 - A|) \qquad \therefore \quad (1+|A|)\phi_A(1) = 0$$

$|A| = 1$ より $\phi_A(1) = 0$，即ち 1 は固有値である．

(4) $\boldsymbol{v}$ を固有値 1 に対する A, B の共通の単位固有ベクトルとする．$\mathbb{R}^3$ 上の標準内積 $(\cdot,\cdot)$ に関する $\boldsymbol{v}_1$ 直交補空間を W，$\{\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ を W の正規直交基底とする．このとき $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底，よって $P = [\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$ は直交行列である．また任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対し

$$(\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{w}) = \varepsilon(A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{w}) = \varepsilon(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{w}) = 0$$

より $AW \subset W$．B についても同様．これより

$${}^tPAP = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & T \end{bmatrix}, \qquad {}^tPBP = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & S \end{bmatrix}, \qquad (T, S \in M_2(\mathbb{R}))$$

という形になる．

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & {}^tTT \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & {}^tT \end{bmatrix} = {}^tP^tAAP = E_3$$

より ${}^tTT = E_2$．$|T| = |A| = 1$ より $T \in SO(2)$ となる．同様の議論により $S \in SO(2)$ も分かる．よって T, S は (1) の形に表される．(1) の形の行列は互いに可換だから $TS = ST$.

$$\therefore \quad AB = P \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & T \end{bmatrix} {}^tP \cdot P \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & S \end{bmatrix} {}^tP = P \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & TS \end{bmatrix} {}^tP = P \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & ST \end{bmatrix} {}^tP = P \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & S \end{bmatrix} {}^tP \cdot P \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & T \end{bmatrix} {}^tP = BA$$

(5) 一般に成立しない．

(反例) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ とする．A, B は共に $SO(3)$ の元であり，$AB = BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる．

$$A - E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B - E_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より固有値 1 に対する A の固有ベクトルは ${}^t[c, 0, 0]$，B の固有ベクトルは ${}^t[0, c, 0]$ (c は 0 ではない定数) だから，A, B は固有値 1 の固有ベクトルを共有しない． $\square$

【問題】 二つの n 次複素正方行列 A, B が相似であるとは $P^{-1}AP = B$ となる n 次複素正則行列 P が存在する事と定義し，$A \sim B$ と書く．

(1) $\sim$ は n 次複素正方行列全体の集合上の同値関係である事を証明せよ．

(2) 各 A_i $(i = 1,2,3,4,5)$ を次で定義される 5 次正方行列とする． どの A_i とどの A_j が相似になるかを決定せよ．また相似になるときはそれぞれの場合に $P^{-1}A_iP = A_j$ となる正則行列 P を具体的に与えよ．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2&0&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2&1&1&1&1\\0&2&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2&0&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&2&2&0\\0&0&0&2&3\\0&0&0&0&2 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2&0&0&0&1\\0&2&1&1&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 2&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&2&0\\1&0&0&0&2 \end{bmatrix}$$

(H16 九州大学数理学府)

【解答】(1) (反射律) $E_n^{-1}AE_n = A$ (E_n は n 次単位行列) より $A \sim A$.
(対称律) $P^{-1}AP = B$ となる n 次正則行列 P が存在したとする． このとき P^{-1} は再び正則であり，$A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$ が成立． 従って $A \sim B$ ならば $B \sim A$ である．
(推移律) n 次正方行列 A, B, C に対し $P^{-1}AP = B$, $Q^{-1}BQ = C$ となる n 次正則行列 P, Q が存在したとする． このとき PQ は正則であり，$(PQ)^{-1}APQ = Q^{-1}P^{-1}APQ = Q^{-1}BQ = C$ となる． 従って $A \sim B$, $B \sim C$ ならば $A \sim C$ である．

以上より $\sim$ は同値関係である事が確かめられた．

(2) 一般に A, B が相似である事と Jordan 標準形が一致する事は同値だから，相似関係を調べる為に A_i の Jordan 標準形を計算する． $B_i = A_i - 2E_5$ とすれば

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad B_1^2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad B_1^3 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad B_1^4 = O$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad B_3^2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad B_3^3 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad B_3^4 = O$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad B_4^2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad B_4^3 = O,$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad B_2^2 = O, \qquad B_5 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad B_5^2 = O$$

となるから，各 A_i に関する Jordan 標準形は次のように決定される：

A_1 について：

$$\operatorname{rank} B_1 = 3, \qquad \operatorname{rank} B_1^2 = 2, \qquad \operatorname{rank} B_1^3 = 1, \qquad \operatorname{rank} B_1^4 = 0$$
$$\operatorname{rank} B_1^0 - 2\operatorname{rank} B_1^1 + \operatorname{rank} B_1^2 = 5 - 6 + 2 = 1, \qquad \operatorname{rank} B_1^1 - 2\operatorname{rank} B_1^2 + \operatorname{rank} B_1^3 = 3 - 4 + 1 = 0,$$
$$\operatorname{rank} B_1^2 - 2\operatorname{rank} B_1^3 + \operatorname{rank} B_1^4 = 2 - 2 + 0 = 0, \qquad \operatorname{rank} B_1^3 - 2\operatorname{rank} B_1^4 + \operatorname{rank} B_1^5 = 1 - 0 + 0 = 1$$

より $A_1 \sim J_1(2) \oplus J_4(2)$.

A_2 について：

$$\operatorname{rank} B_2 = 1, \qquad \operatorname{rank} B_2^2 = 0$$
$$\operatorname{rank} B_2^0 - 2\operatorname{rank} B_2^1 + \operatorname{rank} B_2^2 = 5 - 2 + 0 = 3, \qquad \operatorname{rank} B_2^1 - 2\operatorname{rank} B_2^2 + \operatorname{rank} B_2^3 = 1 - 0 + 0 = 1$$

より $A_2 \sim J_1(2) \oplus J_1(2) \oplus J_1(2) \oplus J_2(2)$.

A_3 について：

$$\operatorname{rank} B_3 = 3, \qquad \operatorname{rank} B_3^2 = 2, \qquad \operatorname{rank} B_3^3 = 1, \qquad \operatorname{rank} B_3^4 = 0$$

$$\operatorname{rank} B_3^0 - 2\operatorname{rank} B_3^1 + \operatorname{rank} B_3^2 = 5-6+2=1, \qquad \operatorname{rank} B_3^1 - 2\operatorname{rank} B_3^2 + \operatorname{rank} B_3^3 = 3-4+1=0,$$
$$\operatorname{rank} B_3^2 - 2\operatorname{rank} B_3^3 + \operatorname{rank} B_3^4 = 2-2+0=0, \qquad \operatorname{rank} B_3^3 - 2\operatorname{rank} B_3^4 + \operatorname{rank} B_3^5 = 1-0+0=1$$

より $A_3 \sim J_1(2) \oplus J_4(2)$.

A_4 について：

$$\operatorname{rank} B_4 = 3, \qquad \operatorname{rank} B_4^2 = 1, \qquad \operatorname{rank} B_4^3 = 0$$

$$\operatorname{rank} B_4^0 - 2\operatorname{rank} B_4^1 + \operatorname{rank} B_4^2 = 5-6+1=0, \qquad \operatorname{rank} B_4^1 - 2\operatorname{rank} B_4^2 + \operatorname{rank} B_4^3 = 3-2+0=1,$$
$$\operatorname{rank} B_4^2 - 2\operatorname{rank} B_4^3 + \operatorname{rank} B_4^4 = 1-0+0=1$$

より $A_4 \sim J_2(2) \oplus J_3(2)$.

A_5 について：

$$\operatorname{rank} B_5 = 1, \qquad \operatorname{rank} B_5^2 = 0$$

$$\operatorname{rank} B_5^0 - 2\operatorname{rank} B_5^1 + \operatorname{rank} B_5^2 = 5-2+0=3, \qquad \operatorname{rank} B_5^1 - 2\operatorname{rank} B_5^2 + \operatorname{rank} B_5^3 = 1-0+0=1$$

より $A_5 \sim J_1(2) \oplus J_1(2) \oplus J_1(2) \oplus J_2(2)$.

これより $A_1 \sim A_3$, $A_2 \sim A_5$ となる. $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ とすれば $P_1^{-1} A_1 P_1 = A_3$. また $P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすれば $P_2^{-1} A_5 P_2 = A_2$ となる. □

【問題】

(1) W_1, W_2 を $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間とするとき，次の事を証明せよ．

(i) W_1, W_2 に共通なベクトルの全体 $W_1 \cap W_2$ は $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間である．

(ii) W_1, W_2 の元の和で表されるベクトルの全体 $W_1 + W_2$ は $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間である．

(iii) 次の式が成り立つ．

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

(2) $W_1, W_2, \cdot, W_k$ を $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間とするとき，次の二つの条件は同値であることを証明せよ．

(i) $W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k) = \{\mathbf{0}\}, \quad (i = 1, \cdots, k)$.

(ii) $\dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_k) = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_k$.

(H14 九州大学数理学府)

【解答】(1) (i) $\boldsymbol{o} \in W_1$ かつ $\boldsymbol{o} \in W_2$ より $\boldsymbol{o} \in W_1 \cap W_2$． $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_1 \cap W_2$， $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ だとする． $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_1$， かつ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_2$ より

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 \in W_1 \quad かつ \quad \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 \in W_2$$

だから $\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 \in W_1 \cap W_2$． 従って $W_1 \cap W_2$ は $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間である．

(ii) $\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} \in W_1 + W_2$． 次に $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$， $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in W_1 + W_2$ $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 \in W_2)$， $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ とする． $\alpha \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{y}_1 \in W_1$， かつ $\alpha \boldsymbol{x}_2 + \alpha_2 \boldsymbol{y}_2 \in W_2$ より

$$\alpha_1(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + \alpha_2(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{y}_1) + (\alpha_1 \boldsymbol{x}_2 + \alpha_2 \boldsymbol{y}_2) \in W_1 + W_2.$$

従って $W_1 + W_2$ は $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間である．

(iii) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ を $W_1 \cap W_2$ の基底とし， $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s$ が W_1 の基底， $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_t$ が W_2 の基底となるような $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s \in W_1$， 及び $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_t \in W_2$ をとる．

・ $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_t$ が $W_1 + W_2$ を生成する事は自明．

・ $x_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_r \boldsymbol{u}_r + y_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_s \boldsymbol{v}_s + z_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + z_t \boldsymbol{w}_t = \boldsymbol{o}$ だとすると

$$x_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_r \boldsymbol{u}_r + y_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_s \boldsymbol{v}_s = -z_1 \boldsymbol{w}_1 - \cdots - z_t \boldsymbol{w}_t \in W_1 \cap W_2$$

だから $y_1 = \cdots = y_s = 0$． 更に $x_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_r \boldsymbol{u}_r + z_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + z_t \boldsymbol{w}_t = \boldsymbol{o}$ だから $x_1 = \cdots = x_r = z_1 = \cdots = z_t = 0$ となり $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s, \boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_t$ は一次独立である．

以上より $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s, \boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_t$ は $W_1 + W_2$ の基底であり，

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim W_1 \cap W_2 = r + s + t + r = r + s + r + t = \dim W_1 + \dim W_2$$

となる．

(2) 部分空間の個数 k に関する帰納法により証明する． $k = 1$ のときは自明． 次に $k > 1$ とし， $k - 1$ 個までの部分空間についての成立を仮定する． 今， k 個の部分空間 $W_1, \cdots, W_k$ について (i) が成立したとする． このとき

$$W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1}) \subset W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k) = \{\boldsymbol{o}\}.$$

従って $W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1}) = \{\boldsymbol{o}\}$ となるから， (1) (iii) と帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + \cdots + W_k) &= \dim(W_1 + \cdots + W_{k-1}) + \dim W_k - \dim(W_1 + \cdots + W_{k-1}) \cap W_k \\ &= \dim(W_1 + \cdots + W_{k-1}) + \dim W_k - 0 = \dim W_1 + \cdots + \dim W_{k-1} + \dim W_k.\end{aligned}$$

一方， (ii) を仮定すると， (1) (iii) 及び帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}&\dim(W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k)) \\ &= \dim W_i + \dim(W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k) - \dim(W_1 + \cdots + W_i + \cdots + W_k) \\ &= \dim W_i + \dim W_1 + \cdots + \dim W_{i-1} + \dim W_{i+1} + \cdots + \dim W_k - \dim W_1 - \cdots - \dim W_i - \cdots - \dim W_k = 0\end{aligned}$$

より $W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k) = \{\boldsymbol{o}\}$ となる． 以上より任意の k に対し (i) (ii) の同値性が示された． □