3　線形空間・線形写像

【問題】V を体 K 上の線形空間，$W_1, \cdots, W_m$ を V の部分空間とする．

(i)

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_m = \{\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_m \in V \ : \ \boldsymbol{w}_i \in W_i\}$$

は V の部分空間となる事を証明せよ．

(ii)

$$W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_m = \{\boldsymbol{w} \in V \ : \ \boldsymbol{w} \in W_i \ (i = 1, \cdots, m)\}$$

は V の部分空間となる事を証明せよ．

(iii)　$W_1 \cap (W_2 + \cdots + W_m) \supset W_1 \cap W_2 + \cdots + W_1 \cap W_m$　となる事を示せ．

(iv)　$W_1 + (W_2 \cap \cdots \cap W_m) \subset (W_1 + W_2) \cap \cdots \cap (W_1 + W_m)$　となる事を示せ．

(vi)　(iii) (iv) の逆の包含関係は一般に成立しない．逆の包含関係に対する反例をそれぞれ挙げよ．

【解答】(i)　W_i は部分空間だから $\boldsymbol{o} \in W_i$．従って $\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} + \cdots + \boldsymbol{o} \in W_1 + \cdots + W_m$ となる．次に $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i \in W_i$，$\alpha, \beta \in K$ ならば

$$\alpha(\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_m) + \beta(\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_m) = (\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{w}_1) + \cdots + (\alpha\boldsymbol{v}_m + \beta\boldsymbol{w}_m) \in W_1 + \cdots + W_m.$$

従って $W_1 + \cdots + W_m$ は部分空間である．

(ii)　W_i は部分空間だから $\boldsymbol{o} \in W_i$，従って $\boldsymbol{o} \in W_1 \cap \cdots \cap W_m$．次に $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W_1 \cap \cdots \cap W_m$，$\alpha, \beta \in K$ のとき，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W_i$ $(i = 1, \cdots, m)$ および各 W_i が部分空間である事から

$$\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}_m \in W_i \quad (i = 1, \cdots, m) \qquad \therefore \quad \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}_m \in W_1 \cap \cdots \cap W_m.$$

従って $W_1 \cap \cdots \cap W_m$ は部分空間である．

(iii)　$\boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_m \in (W_1 \cap W_2) + \cdots + (W_1 \cap W_m)$　$(\boldsymbol{w}_i \in W_1 \cap W_i \ \ (i = 2, \cdots, m))$ だとする．特に $\boldsymbol{w}_i \in W_1$ および W_1 が部分空間である事から $\boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_m \in W_1$．一方，$\boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_m \in W_2 + \cdots + W_m$ だから，$\boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_m \in W_1 \cap (W_2 + \cdots + W_m)$．従って題意の包含関係は成立する．

(iv)　$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w} \in W_1 + (W_2 \cap \cdots \cap W_m)$　$(\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \boldsymbol{w} \in W_2 \cap \cdots \cap W_m)$ とする．特に $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w} \in W_1 + W_i$　$(i = 2, \cdots, m)$ より $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w} \in (W_1 + W_2) \cap \cdots \cap (W_1 + W_m)$．従って題意の包含関係は成立する．

(v)　$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を $\mathbb{R}^2$ の基本ベクトルとし，$W_1 = \mathbb{R}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$, $W_2 = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_1$, $W_3 = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_2$ とする．このとき

$$W_1 \cap (W_2 + W_3) = W_1 \cap \mathbb{R}^2 = W_1,$$

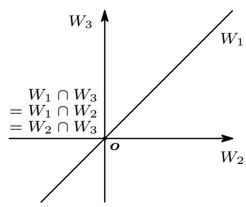
$$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}, \quad W_1 \cap W_3 = \{\boldsymbol{o}\}, \quad W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3 = \{\boldsymbol{o}\}$$

より $W_1 \cap (W_2 + W_3) \not\subset W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3$ となる．また

$$W_1 + W_2 \cap W_3 = W_1 + \{\boldsymbol{o}\} = W_1,$$

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2, \quad W_1 + W_3 = \mathbb{R}^2, \quad (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3) = \mathbb{R}^2$$

より $W_1 + (W_2 \cap W_3) \not\supset (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3)$ となる．　□



【問題】V を $\mathbb{R}$ 上の線形空間とし，$(\cdot,\cdot)$ を V 上の内積とする． また $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V\quad(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{o})$ を固定する． 写像 $T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}:V\to V$ を $T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$ により定義する．

(i) $T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ は V 上の線形変換であることを示せ．

(ii) $W=\{\boldsymbol{x}\in V:T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\}$ は V の部分空間であることを示し，その次元を求めよ．

(iii) $(\mathbf{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{2}$ のとき，$T_{\mathbf{a},\boldsymbol{b}}$ の固有多項式 $\Phi_T(t)$ を求めよ．

(iv) $(\mathbf{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{2}$ のとき，$T_{\mathbf{a},\boldsymbol{b}}$ の最小多項式 $m_T(t)$ を求めよ．

【解答】(i) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})&=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}-((\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}),\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}\\&=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}-\{\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})+\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{b})\}\boldsymbol{a}=\alpha(\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})\boldsymbol{a})+\beta(\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{b})\boldsymbol{a})\end{aligned}$$

より $T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})=\alpha T(\boldsymbol{x})+\beta T(\boldsymbol{y})$，従って $T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ は V 上の線形変換である．

(ii) $\boldsymbol{b}$ に対し

$$f_{\boldsymbol{b}}:V\to\mathbb{R},\qquad f_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})$$

とする．内積の定義より f は V 上の線形形式，即ち V から $\mathbb{R}$ への線形写像であり，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{o}$ より $f(\boldsymbol{b})\neq 0$ となるから, 線形写像に関する次元定理より

$$n=\dim V=\dim\mathrm{Ker}f_{\boldsymbol{b}}+\dim\mathrm{Im}f_{\boldsymbol{b}}=\dim\mathrm{Ker}f_{\boldsymbol{b}}+1$$

即ち $\dim\mathrm{Ker}f_{\boldsymbol{b}}=n-1$ となる．定義より $\boldsymbol{x}\in V$ について

$$T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-f_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}\quad\Leftrightarrow\quad f_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})=0\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}f_{\boldsymbol{b}}$$

だから $W=\mathrm{Ker}f_{\boldsymbol{b}}$ であり，右辺の核は部分空間だから W は部分空間である．だから $\dim W=\dim\mathrm{Ker}f_{\boldsymbol{b}}=n-1$ となる．

(iii) $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1}$ を W の基底とするとき，$B=\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1},\boldsymbol{a}\}$ は V の基底である．

$\because$ 1 次独立性が示されれば B は基底である事が分かる．今，$c_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1}+c_n\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ だとする．このとき $T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{a}$ だから

$$\boldsymbol{o}=T(c_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1}+c_n\boldsymbol{a})=c_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1}-c_n\boldsymbol{a},$$

即ち $c_n\boldsymbol{a}=c_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1}\in W$ となる．$c_n\neq 0$ だとすると $\boldsymbol{a}\in W$ となるが，これは W の定義に反するから $c_n=0$ である．さらに $c_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1}=\boldsymbol{o}$ と $\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1}\}$ の 1 次独立性より $c_1=\cdots=c_{n-1}=0$．よって B は 1 次独立であり，従って B は V の基底となる． ■

$T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{x}_i$，及び $T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{a}$ より，$T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ の B に関する表現行列は

$$\begin{bmatrix}1&&&&O\\&1&&&\\&&\ddots&&\\&&&1&\\O&&&&-1\end{bmatrix}$$

である．よって $T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ の固有多項式は $\Phi_T(t)=(t-1)^{n-1}(t+1)$ である．

(iv) (iii) より最小多項式は $m_T(t)=(t-1)^{\ell}(t+1)\quad(1\leq\ell\leq n-1)$ という形になる．一方，任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対し

$$(T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}+1_V)(T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}-1_V)(\boldsymbol{x})=(T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}+1_V)(f_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a})=f_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a})=\boldsymbol{o}$$

従って $(T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}+1_V)(T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}-1_V)=O$ となるから，$T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ の最小多項式は $m_T(t)=(t-1)(t+1)=t^2-1$ である． □

【問題】$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ -7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ とする．$\mathbb{R}^3$ 上の線形変換 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$，$\mathbb{R}^3$ の部分空間 V を $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$ により定める．

(1) $\mathrm{Ker} f$ の基底と次元を求めよ．

(2) $V \cap \mathrm{Im} f$ の基底を求めよ．

(3) V の基底 $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ で $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u})$ となる組を求めよ．

【解答】(1) A の簡約化は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ だから，$\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3$ に対し

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rr} x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$

より $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ が $\mathrm{Ker} f$ の基底となり，従ってその次元は 1 である．

(2) (1) の簡約化より $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ が $\mathrm{Im} f$ の基底となる．列基本変形を施して

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

最右辺の列簡約化の結果より

$$[c_1\ c_2\ c_3] \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = [0\ 0] \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad [c_1\ c_2\ c_3] = c[1\ 1\ -1] \quad (c \text{ は任意})$$

従って $\mathrm{Im} f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$，$V \cap \mathrm{Im} f = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\}$ となる．この方程式の係数行列に行基本変形を施して

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{bmatrix}$$

最右辺の簡約化の結果より $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1\ x_2\ x_3] \in \mathbb{R}^3$ について

$$\boldsymbol{x} \in V \cap \mathrm{Im} f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - (1/3)x_3 = 0 \\ x_2 - (2/3)x_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (c \text{ は任意}).$$

従って $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ が $V \cap \mathrm{Im} f$ の基底となる．

(3) $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in V \cap \mathrm{Im} f$ と置く．また方程式の形より V の基底として $\left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ がとれる．

$$[\ f(\boldsymbol{v}_1)\ f(\boldsymbol{v}_2) \mid \boldsymbol{u}\ ] = \left[\begin{array}{cc|c} 7 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \\ 15 & 3 & 3 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

より $\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v}_2)$ となる．ここで $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2$ と置けば $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V$ かつ 1 次独立だから $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\}$ は V の基底となり，$\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v})$ を満たす．

線形写像 $f : V \to \mathbb{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ ($\mathbb{R}^3$ の標準基底) に関する表現行列 $[f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2)]$ について，上の計算よりその階数が 2 となる事が分かる．線形写像に関する次元定理 $\dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \mathrm{rank}\, f$ より $\dim \mathrm{Ker} f = 0$，即ち，f は単射だから，$c \in \mathbb{R} - \{0\}$ に対し $f(\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{u}$ となる $\boldsymbol{x} \in V$ は $c\boldsymbol{v}$ のみとなる．

以上の事から $\{c\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{v}\}$ $(c \neq 0)$ が求める基底となる． $\square$