

【問題】 V を実数体 \mathbb{R} 上の有限次元ベクトル空間、 $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を歪対称かつ非退化な双 1 次形式とする。このとき次の間に答えよ。

- (1) $\dim V$ は偶数 ($= 2n$) であることを証明せよ。
- (2) もし V の部分空間 N が、任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N$ に対して $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ を満足するならば、 $\dim N \leq n$ であることを証明せよ。
- (3) (2) において等式 $\dim N = n$ を成り立たせるような N が存在することを証明せよ。

(S55 北海道大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ をとる。 f の非退化性より $f(\mathbf{v}_1, \cdot) \neq 0$ だから $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1) = 1$ となる $\mathbf{v}'_1 \in V$ がとれる。 $\mathbf{v}'_1 \neq \mathbf{0}$ であり、 $x_1 \mathbf{v}_1 + x'_1 \mathbf{v}'_1 = \mathbf{0}$ だとすると

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1 \mathbf{v}_1 + x'_1 \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_1) = x_1 f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1) + x'_1 f(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_1) = x_1 \\ 0 &= f(x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_1) = x_1 f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + x'_1 f(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_1) = -x'_1 \end{aligned}$$

より $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1$ は 1 次独立となる。 $V_1 = \mathbb{R}\mathbf{v}_1 \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}'_1$, $W_1 = \{\mathbf{w} \in V : f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0 (\forall \mathbf{v} \in V_1)\}$ と置く。 $\mathbf{v} \in V$ に対し $\mathbf{w} = \mathbf{v} - f(\mathbf{v}, \mathbf{v}'_1)\mathbf{v}_1 + f(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}'_1$ すれば、

$$\begin{aligned} f(\mathbf{w}, \mathbf{v}_1) &= f(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}, \mathbf{v}'_1)f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)f(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) = 0 \\ f(\mathbf{w}, \mathbf{v}'_1) &= f(\mathbf{v}, \mathbf{v}'_1) - f(\mathbf{v}, \mathbf{v}'_1)f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1) + f(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)f(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_1) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v}'_1) - f(\mathbf{v}, \mathbf{v}'_1) = 0 \end{aligned}$$

より $\mathbf{w} \in W_1$ となるから $V = V_1 + W_1$ 。 また $x_1 \mathbf{v}_1 + x'_1 \mathbf{v}'_1 + \mathbf{w} = \mathbf{0}$ ($x_1, x'_1 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{w} \in W_1$) のとき、

$$0 = f(x_1 \mathbf{v}_1 + x'_1 \mathbf{v}'_1 + \mathbf{w}, \mathbf{v}_1) = -x'_1, \quad 0 = f(x_1 \mathbf{v}_1 + x'_1 \mathbf{v}'_1 + \mathbf{w}, \mathbf{v}'_1) = x_1,$$

かつ $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ となるから、 $V = V_1 + W_1 = V_1 \oplus W_1$ となる。 f の $W_1 \times W_1$ への制限を f_1 とする。 f_1 は歪対称であり、 $\mathbf{w} \in W_1$ に対し $f_1(\mathbf{w}, \mathbf{w}') = 0$ ($\mathbf{w}' \in W_1$) だとする。 $f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{v} \in V_1$) だから、 $V = V_1 \oplus W_1$ および f の非退化性より $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ 。 従って f_1 は再び非退化となる。

$W_1 = \mathbf{0}$ ならば $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ であり、 $W_1 \neq \mathbf{0}$ ならば f_1 に対し、 上と同様の議論により $f(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_2) = 1$ となる \mathbb{R} 上 1 次独立な $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_2 \in W_1$ がとれる。

$$V_2 = \mathbb{R}\mathbf{v}_2 \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}'_2 \subset W_1, \quad W_2 = \{\mathbf{w} \in W_1 : f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0 (\forall \mathbf{v} \in V_2)\}$$

と置けば $W_1 = V_2 \oplus W_2$ であり、 かつ f_1 の $W_2 \times W_2$ への制限 f_2 は再び W_2 上の非退化な歪対称形式となる。

この操作を帰納的に行えば \mathbb{R} 上 1 次独立な $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}'_k \in V$, 及び部分空間 W_1, \dots, W_k で、

$$f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}'_i) = 1, \quad W_{i-1} = \mathbb{R}\mathbf{v}_i \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}'_i \oplus W_i, \quad f|_{W_i \times W_i} \text{ は非退化} \quad (1 \leq i \leq k)$$

となるものがとれる。 $\dim V < \infty$ だからこの操作は有限回 ($= n$ 回) で終わり、 $W_n = \mathbf{0}$ となる。 更に

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}\mathbf{v}_1 \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}'_1 \oplus W_1 \\ &= \mathbb{R}\mathbf{v}_1 \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}'_1 \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}_2 \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}'_2 \oplus W_2 \\ &= \dots \\ &= \mathbb{R}\mathbf{v}_1 \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}'_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}_{n-1} \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}'_{n-1} \oplus W_{n-1} \\ &= \mathbb{R}\mathbf{v}_1 \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}'_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}_{n-1} \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}'_{n-1} \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}_n \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}'_n \end{aligned}$$

となり、 $\dim V = 2n$ となる。

(2) V の双対空間を V^* とする。 一般に、 V の部分空間 W に対し $W^\perp = \{\lambda \in V^* : \lambda(\mathbf{x}) = 0 (\forall \mathbf{x} \in W)\}$ とすれば $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$ となる。

($\because W$ の基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ を含む V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \dots, \mathbf{e}_{2n}\}$ と、 その双対基底 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}\} \subset V^*$ をとる。 $\lambda_i(W) = 0$ ($m < i \leq n$) より $\mathbb{R}\lambda_{m+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\lambda_{2n} \subset W^\perp$, 従って $2n - m \leq \dim W^\perp$ が成立。 一方、 $\lambda_i \notin W^\perp$ ($1 \leq i \leq m$) だから $\mathbb{R}\lambda_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\lambda_m \cap W^\perp = \mathbf{0}$, 従って $m + \dim W^\perp \leq 2n$ が成立。 故に $\dim W^\perp = 2n - m = \dim V - \dim W$ となる。)

f が非退化である事から、 $V \ni \mathbf{x} \mapsto f(\cdot, \mathbf{x}) \in V^*$ は \mathbb{R} 上の線形同型射であり、 $\lambda \in V^*$ について $\lambda(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ ($\mathbf{v} \in V$) となる $\mathbf{x} \in V$ を \mathbf{x}_λ と記す事にする。 このとき

$$N' = \{\mathbf{x}_\lambda \in V : \lambda \in N^\perp\} = \{\mathbf{x} \in V : f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0 (\forall \mathbf{y} \in N)\}$$

とすれば $N^\perp \ni \lambda \rightarrow \mathbf{x}_\lambda \in N'$ は同型。 仮定より $N \subset N'$ となるから、 上の次元に関する公式より

$$\dim N \leq \dim N^\perp = \dim V - \dim N, \quad 2 \dim N \leq \dim V = 2n, \quad \therefore \dim N \leq n$$

(3) (1) で構成した V の基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_n$ をとるとき、 $N = \mathbb{R}\mathbf{v}_1 \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}_n$ と置く。 $i < j$ のとき $\mathbf{v}_j \in W_i$ より $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$ が成立。 従って $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N$) である。 \square

〈雑感〉 非退化な交代 (=歪対称) 形式を symplectic 形式という. また $\dim N = n$ となる部分空間 N を Lagrange 部分空間という. 問題は symplectic 線形空間の一般論をそのまま問題にしたもの.

(2) で双対空間の一般論に証明を付けたが, 次元公式などは有名な事実だから, もしかしたら証明は不要かもしれない. □