【問題】 3×3 行列

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 9\\ -1 & 0 & -7\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

を考える．線形変換 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3)$ で定める．次の問に答えよ．

(1) A の固有値と，各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．
(2) f の像 $\mathrm{Im}\ f$，及び f の核 $\mathrm{Ker}\ f$ の基底を求めよ．
(3) $\mathbb{R}^3$ は $\mathrm{Im}\ f$ と $\mathrm{Ker}\ f$ の直和となることを示せ．
(4) 正の整数 n に対して $A^{2n-1}=A,\ A^{2n}=A^2$ となることを示せ．
(5) $P^{-1}AP=-A$ となる実正則行列 P が存在する事を示せ．
(6) P を $P^{-1}AP=-A$ を満たす実正則行列とする．線形変換 $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $g(\boldsymbol{x})=P\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3)$ で定める．このとき $g(\mathrm{Ker}\ f)=\mathrm{Ker}\ f$ となることを示せ．

(H28 広島大学理学研究科 数学)

【解答】 (1)

$$|tE_3-A|=\begin{vmatrix}t-2 & -1 & -9\\ 1 & t & 7\\ 1 & 1 & t+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1 & -1 & -9\\ 1-t & t & 7\\ 0 & 1 & t+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1 & -1 & -9\\ 0 & t-1 & -2\\ 0 & 1 & t+2\end{vmatrix}=t(t-1)(t+1)$$

より A の固有値は $0,1,-1$．さらに

$$A-0E_3=\begin{bmatrix}2 & 1 & 9\\ -1 & 0 & -7\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A-E_3=\begin{bmatrix}2-1 & 1 & 9\\ -1 & -1 & -7\\ -1 & -1 & -2-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A-(-1)E_3=\begin{bmatrix}2+1 & 1 & 9\\ -1 & 1 & -7\\ -1 & -1 & -2+1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

より $0,1,-1$ に対する固有ベクトルはそれぞれ $c\begin{bmatrix}-7\\ 5\\ 1\end{bmatrix}$, $c\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$, $c\begin{bmatrix}-4\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$ (c は 0 以外の任意定数) となる．

(2) (1) の計算より $A\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ となるから $\left\{\begin{bmatrix}2\\ -1\\ -1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}\right\}$ が $\mathrm{Im}\,f$ の基底，$\left\{\begin{bmatrix}-7\\ 5\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ が $\mathrm{Ker}\,f$ の基底となる．

(3) (2) で求めた $\mathrm{Im}\,f$ と $\mathrm{Ker}\,f$ の基底を並べた行列を B とすると

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -7\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & -9\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & -7\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -7\end{vmatrix}=-7\neq 0$$

より $\mathbb{R}^3=\mathrm{Im}\,f\oplus\mathrm{Ker}\,f$ が分かる．

(4) n に関する帰納法により証明する．$n=1$ のときは自明．$n>1$ とし $n-1$ まで正しいとする．このとき

$$A^{2n-1}=A^{2(n-1)}A=A^2A=\begin{bmatrix}-6 & -7 & -7\\ 5 & 6 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 9\\ -1 & 0 & -7\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 9\\ -1 & 0 & -7\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}=A.$$

更に $A^{2n}=A^{2n-1}A=A^2$ だから，任意の n に対し等式が成立する．

(5) $J=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ とすれば $J^2=E_2$，かつ $J\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}J=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ となる．また $Q=\begin{bmatrix}-7 & -1 & -4\\ 5 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ とすれば (1) の結果よ

り $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ となる． ここで $P = Q \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & J \end{bmatrix} Q^{-1}$ とすれば P は正則であり，

$$P^{-1}AP = Q \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & J \end{bmatrix} Q^{-1}AQ \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & J \end{bmatrix} Q^{-1} = Q \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & J \end{bmatrix} Q^{-1}$$
$$= Q \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q^{-1} = -Q \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Q^{-1} = -A$$

となる．

(6) $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f$ のとき，$P^{-1}AP\boldsymbol{v} = -A\boldsymbol{v} = -f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ より $AP(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$，即ち $g(\operatorname{Ker} f) \subset \operatorname{Ker} f$ となる． 一方，$-A = PAP^{-1}$ だから $PAP^{-1}(\boldsymbol{v}) = -A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$，$AP^{-1}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$． 従って $P^{-1}(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker} f$，$\operatorname{Ker} f \subset g(\operatorname{Ker} f)$． 故に $g(\operatorname{Ker} f) = \operatorname{Ker} f$． □

【問題】 $M(3,\mathbb{R})$ を 3 次実行列全体ののあす実線形空間とし，$V = \{X \in M(3,\mathbb{R}) \mid {}^tX = -X\}$ とする．ただし行列 X に対して ${}^tX$ は X の転置行列を表す．

(1) V は $M(3,\mathbb{R})$ の線形部分空間であることを示せ．

(2) $\left\{ X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ は V の基底であることを示せ．

(3) $A \in M(3,\mathbb{R})$ とする．$X \in V$ に対して $f_A(X) = {}^tAXA$ と定めるとき，f_A は V から V への線形写像であることを示せ．

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，V の基底 $\{X_1, X_2, X_3\}$ に関する f_A の行列表示を求めよ．ただし a, b は実定数とする．

(5) (4) の A に対して，f_A の像 $\mathrm{Im} f_A$ の次元 $\dim \mathrm{Im} f_A$ を求めよ．

(6) (4) の A に対して，f_A の像 $\mathrm{Im} f_A$ と核 $\mathrm{Ker} f_A$ の基底をそれぞれ 1 組を求めよ．

(H19 広島大学理学研究科 数学)

【解答】 (1) 零行列 O について ${}^tO = -O = O$ より $O \in V$．また $X_1, X_2 \in V$，$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ に対して

$$ {}^t(\alpha X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 {}^tX_1 + \alpha_2 {}^tX_2 = \alpha_1(-X_1) + \alpha_2(-X_2) = -(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) $$

より $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \in V$ となる．従って V は $M(3,\mathbb{R})$ の線形部分空間である．

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ に対し

$$ \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_1 & 0\alpha_3 & \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 \end{pmatrix} $$

だから，$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = O$ ならば明らかに $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$．従って $\{X_1, X_2, X_3\}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立である．一方，任意の元 $X = [x_{ij}] \in V$ に対し

$$ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_{11} = x_{22} = x_{33} = 0 \\ x_{21} = -x_{12},\ x_{31} = -x_{13},\ x_{32} = -x_{23} \end{array} $$

より $X \in V$ は

$$ X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 \end{pmatrix} = x_{12} X_1 + x_{13} X_3 + x_{23} X_3 $$

と表される．よって $\{X_1, X_2, X_3\}$ は V の基底である．

(3) $X \in M(3,\mathbb{R})$ に対し ${}^t({}^tAXA) = {}^tA {}^tX {}^t({}^tA) = {}^tA {}^tXA$．$X \in V$ ならば ${}^tX = -X$ だから ${}^t({}^tAXA) = -{}^tAXA$．従って $f_A(X) \in V$ である．また $X_1, X_2 \in M(3,\mathbb{R})$，$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ に対し

$$ f_A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = {}^tA(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)A = \alpha_1 {}^tAX_1A + \alpha_2 {}^tAX_2A = \alpha_1 f_A(X_1) + \alpha_2 f_A(X_2). $$

従って f_A は $\mathbb{R}$ 上の線形写像である．

(4)

$$ f_A(X_1) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1-a^2 & -ab \\ a^2-1 & 0 & -b \\ ab & b & 0 \end{pmatrix} = (1-a^2)X_1 - abX_2 - bX_3 $$

$$ f_A(X_2) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ab & 1-b^2 \\ ab & 0 & a \\ b^2-1 & -a & 0 \end{pmatrix} = -abX_1 + (1-b^2)X_2 + aX_3 $$

$$ f_A(X_3) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & 1 \\ -a & -1 & 0 \end{pmatrix} = -bX_1 + aX_2 + X_3 $$

従って $\{x_1, x_2, x_3\}$ に関する f_A の行列表示は $\underline{\begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -b \\ -ab & 1-b^2 & a \\ -b & a & 1 \end{pmatrix}}$

(5) (6) $$\begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -b \\ -ab & 1-b^2 & a \\ -b & a & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-a^2-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-b^2-a^2 & 0 \\ -b & a & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots \ (*)$$

$a^2+b^2 \neq 1$ ならば

$$(*) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & a & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より $\dim \mathrm{Im}\ f_A = 3$. このとき $\mathrm{Ker}\ f_A = \{\mathbf{0}\}$, $\mathrm{Im}\ f_A = V$ だから $\{X_1, X_2, X_3\}$ が像の基底となる.

$a^2+b^2=1$ のとき, $(*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 1 \end{pmatrix}$ より $\dim \mathrm{Im} f_A = 1$. このとき $\{f_A(X_3) = -bX_1 + aX_2 + X_3\}$ が $\mathrm{Im}\ f_A$ の基底であり, $\{X_1 + bX_3,\ X_2 - aX_3\}$ が $\mathrm{Ker}\ f_A$ の基底となる. □

【問題】 A を n 次正方行列で，$A^k = O$，$A^{k-1} \neq O$ とする．また $V^{(\ell)} = \mathrm{Ker} A^\ell \ \ (0 \leq \ell \leq k)$ と置く．ただし A^0 は n 次単位行列とする．また n 次正方行列 B に対し，$\mathrm{Ker} B$ は B を $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ への線形写像とみたときの核とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) A は正則でないことを示せ．

(2) $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ を満たす $\boldsymbol{o}$ (零ベクトル) ではないベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ が存在することを示せ．

(3) $V^{(\ell)}$ は $\mathbb{C}^n$ の部分空間であることを示せ．

(4) $1 \leq \ell \leq k$ として次を示せ．

i) $V^{(k)} = \mathbb{C}^n \supset V^{(k-1)} \supset \cdots \supset V^{(1)} \supset V^{(0)} = \{\boldsymbol{o}\}$

ii) $V^{(\ell)} \neq V^{(\ell-1)}$

iii) $AV^{(\ell)} \subset V^{(\ell-1)}$

(5) $k = n$ のとき，$\boldsymbol{v}_\ell \ \ (1 \leq \ell \leq n)$ を $\boldsymbol{v}_\ell \in V^{(\ell)}$ かつ $\boldsymbol{v}_\ell \notin V^{(\ell-1)}$ なるベクトルとする．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は一次独立であることを示せ．

(6) $k = n$ のとき，A の Jordan 標準形を求めよ．また A によって定まる線形写像の表現行列が Jordan 標準形となるような $\mathbb{C}^n$ の基底を 1 組求めよ．

(H23 広島大学理学研究科 数学)

【解答】 (1) A の行列式 $|A|$ について，$|A|^k = |A^k| = 0$，$|A| = 0$ だから A は正則ではない．

(2) $A^{k-1} \neq O$ より $A^{k-1}v \neq \boldsymbol{o}$ となる $v \in \mathbb{C}^n$ が存在する．このとき $A(A^{k-1}v) = \boldsymbol{o}$ より $A^{k-1}v$ が求めるものとなる．

(3) 明らかに $\boldsymbol{o} \in V^{(\ell)}$ であり，$v, w \in V^{(\ell)}$，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し $A^\ell(\alpha v + \beta w) = \alpha A^\ell(v) + \beta A^\ell(w) = \boldsymbol{o}$ より $\alpha v + \beta w \in V^{(\ell)}$ となる．従って $V^{(\ell)}$ は部分空間である．

(4) i) $A^k = O$ 及び A^0 は単位行列である事より $V^{(k)} = V$ 及び $V^{(0)} = \{\boldsymbol{o}\}$ は明らか．また $v \in V^{(i)}$ のとき $A^{i+1}v = A(A^i v) = \boldsymbol{o}$ より $v \in V^{(i+1)}$，従って $V^{(i+1)} \supset V^{(i)}$．

ii) $V^{(\ell)} = V^{(\ell-1)}$ となる ℓ があったとする．$A^{k-1} \neq O$ より $A^{k-1}v \neq \boldsymbol{o}$ となる v が存在する．ところが $A^\ell A^{k-\ell}\boldsymbol{v} = A^k\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$，$A^{k-\ell}v \in V^{(\ell)} = V^{(\ell-1)}$ だから $A^{k-1}v = A^{\ell-1}A^{k-\ell}v = \boldsymbol{o}$ となり v のとり方に反する．従って $V^{(\ell)} \supsetneq V^{(\ell-1)}$ となる．

iii) $v \in V^{(\ell)}$ のとき，$A^\ell v = A^{\ell-1}(Av) = \boldsymbol{o}$ より $Av \in V^{(\ell-1)}$．

(5) $x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = \boldsymbol{o}$ だとする．このとき

$$\boldsymbol{o} = A^{n-1}(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = x_1A^{n-1}(v_1) + \cdots + x_{n-1}A^{n-1}(v_{n-1}) + x_nA^{n-1}(v_n) = x_nA^{n-1}(v_n)$$

及び $A^{n-1}(v_n) \neq \boldsymbol{o}$ より $x_n = 0$．次に A^{n-2} を掛けて

$$\boldsymbol{o} = A^{n-2}(x_1v_1 + \cdots + x_{n-1}v_{n-1}) = x_1A^{n-2}(v_1) + \cdots + x_{n-2}A^{n-2}(v_{n-2}) + x_{n-1}A^{n-2}(v_{n-1}) = x_{n-1}A^{n-2}(v_{n-1})$$

だから，$A^{n-2}(v_{n-1}) \neq \boldsymbol{o}$ より $x_{n-1} = 0$．以下同様にして $x_n = x_{n-1} = \cdots = x_1 = 0$ を得る．

(6) $A^{n-1}v_n \neq \boldsymbol{o}$ となる $v_n \in V$ をとり，$v_1 = A^{n-1}v_n, v_2 = A^{n-2}v_n, \cdots, v_{n-1} = Av_n, v_n$ とする．このとき

$$A^{n-i}v_i = A^{n-i}A^iv_n = v_n \neq \boldsymbol{o}, \qquad A^{n+1-i}v_i = A^{n+1-i}A^iv_n = Av_n = \boldsymbol{o}$$

より $v_i \in V^{(n+1-i)}$，$v_i \notin V^{(n-i)}$ だから，(5) より $\{v_1, \cdots, v_n\}$ は 1 次独立，従って $\mathbb{C}^n$ の基底となる．

$$Av_i = A(A^{n-i}v_n) = A^{n-(i-1)}v_n = v_{i-1} \quad (i = 2, \cdots, n), \qquad Av_1 = A^nv_n = \boldsymbol{o}$$

より，この基底に関する A の表現行列は Jordan 行列 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$ となる． □