【問題】 d 次 $(d \geq 2)$ の実正方行列 A はベキ零で，$A \neq O$ とする．線形変換 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有多項式 $p(x)$ が x^d である事を示せ．
(2) A は対角化できない事を示せ．
(3) $a_n = \operatorname{rank} A^n$ と置くとき，$d = a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_d = 0$ を示せ．
(4) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ のとき，数列 $\{a_n\}$ 及び A の Jordan 標準形を求めよ．

(H29 千葉大学理学研究科 数学・情報)

【解答】 $f^{k-1} \neq 0,\ f^k = 0 \ \ (k \geq 2)$ だとする．

(1) A の任意の固有値 λ とその固有ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^d$ について $A^k\boldsymbol{x} = \lambda^k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ より $\lambda^k = 0$，従って $\lambda = 0$ となり，これより $p(t) = t^d$ となる．

(2) A が対角化可能だとすると $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(0, \cdots, 0)$ となる d 次正則行列 P が存在するが，$A = P\operatorname{diag}(0, \cdots, 0)P^{-1} = O$ となり $A \neq O$ に反する．故に A は対角化できない．

(3) $\operatorname{Im} f^l \supset \operatorname{Im} f^{l+1}$ より $a_l = \dim \operatorname{Im} f^l \geq \dim \operatorname{Im} f^{l+1} = a_{l+1}$ である．今，$\operatorname{Im} f^l = \operatorname{Im} f^{l+1}$ となる $l < k$ が存在したとする．任意の $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 及び $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Im} f^{l+m}$ に対し $\boldsymbol{x} = f^{l+m}\boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ が存在．さらに $f^{l+1}\boldsymbol{y} = f^l\boldsymbol{z}$ となる $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d$ が存在．このとき

$$\boldsymbol{x} = f^{m-1}f^{l+1}\boldsymbol{y} = f^{m-1}f^l\boldsymbol{z} = f^{l+m-1}\boldsymbol{z} \in \operatorname{Im} f^{l+m-1}, \qquad \therefore \operatorname{Im} f^{l+m-1} = \operatorname{Im} f^{l+m}.$$

この操作を繰り返せば $\operatorname{Im} f^{l+m} = \operatorname{Im} f^l$ となるが，これは f がベキ零である事に反する．故に $0 \leq l < k$ となる任意の l について $\operatorname{Im} f^l \supsetneq \operatorname{Im} f^{l+1}$，よって $a_l > a_{l+1}$ となる．特にこれから $k \leq d$，従って $a_d = 0$ となる．

(3) 次元公式と仮定より $d = \operatorname{rank} f + \dim \operatorname{Ker} f = 2\operatorname{rank} f$，$\operatorname{rank} f = d/2$．再び仮定より $f^2 = 0$ だから $a_0 = d$，$a_1 = d/2$，$a_i = 0$ $(i \geq 2)$ となる．A はベキ零行列だから，A の Jordan 標準形はベキ零 Jordan 細胞 (= 固有値が 0 の Jordan 細胞) の直和となる．更に

$$(\text{直和に現れる } l \text{ 次 Jordan 細胞の個数}) = \begin{cases} a_0 - 2a_1 + a_2 = d - 2(d/2) + 0 = 0, & (l = 1) \\ a_1 - 2a_2 + a_3 = d/2 - 2 \cdot 0 + 0 = d/2, & (l = 2) \\ 0 & (l \geq 3) \end{cases}$$

だから，A の Jordan 標準形は 2 次ベキ零 Jordan 細胞の $d/2$ 個の直和となる． □

【問題】 $M_n(\mathbb{C})$ を n 次複素正方行列全体とする．$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し線形変換 $\theta_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ を $\theta_A(X) = AXA$ と定める．また J_d を固有値 0 の d 次 Jordan 細胞とする．

(1) $A = J_2$ 及び $A = J_3$ の場合に $\theta_A(X) = A$ となる X をそれぞれ一つずつ求めよ．
(2) $J = J_3 \in M_3(\mathbb{C})$ とする．
  (a) $\mathrm{Ker}\,\theta_J$, $\mathrm{Ker}(\theta_J)^2$, $\mathrm{Ker}(\theta_J)^3$ の次元を求めよ．
  (b) θ_J の最小多項式 $\psi(t)$ 及び固有多項式 $\phi(t)$ を求めよ．
  (c) θ_J の Jordan 標準形はどんな行列かを答えよ．
(3) 任意の $A \in M_3(\mathbb{C})$ に対し $\theta_A(X) = A$ となる X が存在する事を示せ．

(H28 千葉大学理学研究科 数学・情報)

【解答】 (1) $X = [x_{ij}]$ とする． $\theta_{J_2}(X) = \begin{bmatrix} 0 & x_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，例えば $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とすれば $\theta_{J_2}(X) = J_2$ となる． また $\theta_{J_3}(X) = \begin{bmatrix} 0 & x_{21} & x_{22} \\ 0 & x_{31} & x_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，例えば $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とすれば $\theta_{J_3}(X) = J_3$ となる．

(2) (a) $X = [x_{ij}]$ に対し (1) の計算より $X \in \mathrm{Ker}\,\theta_J \Leftrightarrow x_{21} = x_{22} = x_{31} = x_{32} = 0$ より $\dim \mathrm{Ker}\,\theta_J = 9 - 4 = 5$.

$\theta_J^2(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $X \in \mathrm{Ker}\,\theta_J \Leftrightarrow x_{31} = 0$. 従って $\dim \mathrm{Ker}\,\theta_J = 9 - 1 = 8$.

$\theta_J^3(X) = O$ より $\dim \mathrm{Ker}\,\theta_J^3 = 9$.

(b) (a) の計算より $\theta_J^2 \neq O$, $\theta_J^3 = O$ だから $\psi(t) = t^3$. Cayley-Hamilton の定理より $t^3 \mid \phi(t)$. $\phi(t)$ は次数 3 の単多項式だから $\phi(t) = t^3$ となる．

(c) (b) の結果より θ_J の固有値は 0 のみだから，θ_J の Jordan 標準形に現れる Jordan 細胞は J_d という形の細胞のみ．また標準形に現れる d 次 Jordan 細胞の個数は $m_d = \mathrm{rank}\,\theta_J^{d-1} - 2\,\mathrm{rank}\,\theta_J^d + \mathrm{rank}\,\theta_J^{d+1}$ で与えられる．(a) の計算より

$$m_1 = \mathrm{rank}\,\theta_J^0 - 2\,\mathrm{rank}\,\theta_J + \mathrm{rank}\,\theta_J^2 = 9 - 2 \cdot 4 + 1 = 2,$$

$$m_2 = \mathrm{rank}\,\theta_J - 2\,\mathrm{rank}\,\theta_J^2 + \mathrm{rank}\,\theta_J^3 = 4 - 2 \times 1 + 0 = 2,$$

$$m_3 = \mathrm{rank}\,\theta_J^2 - 2\,\mathrm{rank}\,\theta_J^3 + \mathrm{rank}\,\theta_J^4 = 1 - 2 \cdot 0 + 0 = 1$$

となるから θ_J の Jordan 標準形は $J_3 \oplus J_2 \oplus J_2 \oplus J_1 \oplus J_1$ となる．

(3) 先ず A が Jordan 行列である場合を考える．

(a) $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ (対角行列) のとき，$X = \mathrm{diag}(x_1, x_2, x_3)$ と置けば $AXA = \mathrm{diag}(\alpha_1^2 x_1, \alpha_2^2 x_2, \alpha_3^2 x_3)$ より $\alpha_i \neq 0$ ならば $x_i = \alpha_i^{-1}$, $\alpha_i = 0$ のとき，$x_i = 0$ と置けば $\theta_A(X) = A$ となる．

(b) $A = (\alpha_1 E_2 + J_2) \oplus \alpha_2$ のとき，

$$\theta_A(X) = \begin{bmatrix} \alpha_1(\alpha_1 x_{11} + x_{21}) & \alpha_1^2 x_{12} + \alpha_1(x_{11} + x_{22}) + x_{21} & \alpha_2(\alpha_1 x_{13} + x_{23}) \\ \alpha_1^2 x_{21} & \alpha_1 x_{21} + \alpha_1^2 x_{22} & \alpha_1 \alpha_2 x_{23} \\ \alpha_1 \alpha_2 x_{31} & \alpha_1 x_{31} + \alpha_1 \alpha_2 x_{32} & \alpha_2^2 x_{33} \end{bmatrix} \qquad (*)$$

となる．

(i) $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$ のとき，$(*)$ より $X = \begin{bmatrix} \alpha_1^{-1} & -\alpha_1^{-2} & 0 \\ 0 & \alpha_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2^{-1} \end{bmatrix}$ とすれば $\theta_A(X) = A$ となる事が分かる．

(ii) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$ のとき，(1) より $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2^{-1} \end{bmatrix}$ とすれば $\theta_A(X) = A$ となる．

(iii) $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = 0$ のとき，$(*)$ より $X = \begin{bmatrix} \alpha_1^{-1} & -\alpha_1^{-2} & 0 \\ 0 & \alpha_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすれば $\theta_A(X) = A$ となる．

(iv) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ のとき，(1) より $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすれば $\theta_A(X) = A$ となる．

(c) $A=(\alpha E_3+J_3)$ のとき,

$$\theta_A(X)=\begin{bmatrix}\alpha^2x_{11}+\alpha x_{21} & \alpha^2x_{12}+\alpha(x_{11}+x_{22})+x_{21} & \alpha^2x_{13}+\alpha(x_{12}+x_{23})+x_{22}\\ \alpha^2x_{21}+\alpha x_{31} & \alpha^2x_{22}+\alpha(x_{21}+x_{32})+x_{31} & \alpha^2x_{23}+\alpha(x_{22}+x_{33})+x_{32}\\ \alpha^2x_{31} & \alpha x_{31}+\alpha^2x_{32} & \alpha x_{32}+\alpha^2x_{33}\end{bmatrix}\tag{$**$}$$

となる.

(i) $\alpha\neq 0$ のとき, $(**)$ より $X=\begin{bmatrix}\alpha^{-1} & -\alpha^{-2} & \alpha^{-3}\\ 0 & \alpha^{-1} & -\alpha^{-2}\\ 0 & 0 & \alpha^{-1}\end{bmatrix}$ とすれば $\theta_A(X)=A$ となる事が分かる.

(ii) $\alpha=0$ のとき, (1) より $X=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ とすれば $\theta_A(X)=A$ となる.

以上の考察より A が Jordan 行列の場合には $\theta_A(X)=A$ となる X の存在が示された. 一般の A に対し, その Jordan 標準形を J_A とし, $P^{-1}AP=J_A$ となる 3 次正則行列 P をとる. 上述より $\theta_{J_A}(X)=J_A$ となる X が存在し,

$$A=PJ_AP^{-1}=PJ_AXJ_AP^{-1}=(PJ_AP^{-1})(PXP^{-1})(PJ_AP^{-1})=A(PXP^{-1})A,$$

従って $\theta_A(PXP^{-1})=A$ となるから, 一般の A についても $\theta_A(X)=A$ となる X の存在が示された. $\square$

【問題】 A を実数を成分とする 4 次正方行列，f を $\mathbb{R}^4$ の線形変換で $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義されるものとする．$f^2 = f \circ f$ を合成変換とするとき，$\mathrm{Ker}\ f \neq \mathrm{Ker}\ f^2$ が成り立つと仮定する．

(1) f が単射でないことを示せ.

(2) $\mathrm{rank}\ A^2 \leq 2$ を示せ.

(3) A は対角化できないことを示せ.

(4) さらにある 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^4$ に対して

$$f(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \qquad f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$$

が成り立つと仮定する．このとき A の固有多項式と Jordan 標準形を求めよ．

(H26 千葉大学理学研究科 数学・情報)

【解答】 (1) 一般に $\mathrm{Ker}f \subset \mathrm{Ker}f^2$ であり，$\mathrm{Ker}\ f \neq \mathrm{Ker}\ f^2$ より $f^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$，$f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x} \in V$ が存在する．$f(f(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$ より $f(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Ker}\ f\}$，故に $\mathrm{Ker}f \neq \{0\}$ である．

(2) (1) より $\mathrm{Ker}f \neq \{\boldsymbol{0}\}$，$\dim \mathrm{Ker}f \geq 1$．一般に $\mathrm{Ker}f \subset \mathrm{Ker}f^2$ と仮定 $\mathrm{Ker}f \neq \mathrm{Ker}f^2$ より $\dim \mathrm{Ker}f < \dim \mathrm{Ker}f^2$ だから $2 \leq \dim \mathrm{Ker}f^2$．次元公式より

$$\mathrm{rank}\, A^2 = \dim \mathrm{Im} f^2 = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}f^2 \leq 4 - 2 = 2.$$

(3) A が対角化可能だとすると固有ベクトルから成る基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_4\}$ $(f(\boldsymbol{p}_i) = \lambda_i \boldsymbol{p}_i)$ がとれる．必要ならば添字を変更して $\lambda_j = 0$ $(j \leq i)$，$\lambda_j \neq 0$ $(i < j)$ だとする．

仮定より $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}f^2 - \mathrm{Ker}f$ がとれ，これを $\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^4 a_j \boldsymbol{p}_j$ とすれば

$$f(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^4 a_j \lambda_j \boldsymbol{p}_j \neq \boldsymbol{0}, \qquad f^2(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^4 a_j \lambda_j^2 \boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{0}$$

が成立．後者より $a_j \lambda_j^2 = 0$ だから $a_j = 0$ $(i < j)$，従って $\boldsymbol{v} = \sum_{j \leq i} a_i \boldsymbol{p}_j$ と表されるが，$\lambda_j = 0$ $(j \leq i)$ より $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ となり矛盾を生ずる．故に A は対角化できない．

(4) $\mathrm{Ker}f \subsetneq \mathrm{Ker}f^2$ より $f(\boldsymbol{p}_2) \neq \boldsymbol{0}$，$f^2(\boldsymbol{p}_2) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{p}_2 \in \mathbb{R}^4$ が存在する．ここで $\boldsymbol{p}_1 = f(\boldsymbol{p}_2)$ と置く．更に $\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ と置く．仮定より $\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ は固有値 1 に対する A の固有ベクトルである．ここで $a_1\boldsymbol{p}_1 + a_2\boldsymbol{p}_2 + a_3\boldsymbol{p}_3 + a_4\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{0}$ だとする．この両辺に左から A^2 を掛ければ

$$\begin{aligned}
&a_1 A\boldsymbol{p}_1 + a_2 A\boldsymbol{p}_2 + a_3 A\boldsymbol{p}_3 + a_4 A\boldsymbol{p}_4 = a_1\boldsymbol{p}_1 + a_3\boldsymbol{p}_3 + a_4\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{0}, \\
&a_1 A^2\boldsymbol{p}_1 + a_2 A^2\boldsymbol{p}_2 + a_3 A^2\boldsymbol{p}_3 + a_4 A^2\boldsymbol{p}_4 = a_3\boldsymbol{p}_3 + a_4\boldsymbol{p}_4 = a_3\boldsymbol{a} + (a_4 - a_3)\boldsymbol{b} - a_4\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

後者と $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の一次独立性より $a_3 = a_2 = 0$．また $a_1\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{p}_1 = f(\boldsymbol{p}_2) \neq \boldsymbol{0}$ より $a_1 = 0$．さらに $a_2\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{p}_2 \neq \boldsymbol{0}$ より $a_2 = 0$．よって $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_4$ は一次独立である．そこで $P = [\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_4]$ とすれば P は正則となる．このとき

$$AP = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4] = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

より A の Jordan 標準形は $\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$．また固有多項式 $\varphi_A(t) = |tE_4 - A|$ は

$$\varphi_A(t) = |tE_4 - P^{-1}AP| = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = \underline{t^2(t-1)^2}$$

□

【問題】 x, y, z を変数 t の関数として，ベクトル $X = X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ に対し $\dfrac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix}$ とおく．このとき微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2/t \end{pmatrix} X$$

を解け．

(H23 千葉大学理学研究科 数学・情報)

【解答】簡便の為，t に関する微分を $\cdot$ により表す．z は $\dot{z} = (2/t)z$，即ち $t\dot{z} = 2z$ を満たす．$t = e^s$ と置換すれば

$$\frac{d}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt} = e^s \frac{d}{dt} = t\frac{d}{dt}$$

より z は $dz/ds = 2z$ を満たす．従って $z = C_3 e^{2s} = C_3 e^{2\log t} = \underline{C_3 t^2}$ (C_3 は任意定数) となる．これを代入すれば方程式の第 1,2 成分は x, y は連立方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \qquad \left(\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_3 t^2 \end{bmatrix} \right)$$

を満たす．係数行列 A は

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \left(P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

と対角化されるから，$\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x} = {}^t[u, v]$ とすれば u, v は

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \frac{C_3}{4} \begin{bmatrix} t^2 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

を満たす．一般に 1 階線形常微分方程式 $\dot{x} = \alpha x + f(t)$ の一般解は

$$x = e^{\alpha t}\left(\int e^{-\alpha t} f(t) dt + C \right) \qquad (C \text{ は任意定数})$$

により与えられる．また部分積分より $\displaystyle\int t^2 e^{-\alpha t} dt = -\left(\frac{t^2}{\alpha} + \frac{2t}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) e^{-\alpha t}$ だから，上の u, v は

$$\begin{cases} u = C_1 e^{3t} - \dfrac{C_3}{4 \cdot 27}\left(9t^2 + 6t + 2\right) \\ v = C_2 e^{-t} + \dfrac{C_3}{4}\left(t^2 - 2t + 2\right) \qquad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}) \end{cases}$$

となる．$x = u - v$，$y = 3u + v$ より x, y は次で与えられる：

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} + \dfrac{C_3}{27}(9t^2 - 12t + 14) \\ y = 3C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} - \dfrac{2C_3}{9}(3t - 2) \qquad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}) \end{cases}$$

□

〈雑感〉“線形” 常微分方程式なので線形代数の問題として扱う．

【問題】 多項式 p に対して,

$$(Tp)(x) = (x+1)p(x+1) - xp(x)$$

と定める.

(1) n 次以下の複素数係数多項式全体の集合を V_n とすると, V_n は通常の和とスカラー倍とでベクトル空間となる. 上で定めた対応 $p \mapsto Tp$ は V_n の線形変換となることを示せ.

(2) $n=4$ の場合を考える. V_4 の適当な基底を選んで, 線形変換 $T: V_4 \to V_4$ を対角行列で表現せよ.

(H11 千葉大学理学研究科 数学・情報)

【解答】(1) $p_1, p_2 \in V_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ とすると

$$\begin{aligned}
T(\alpha p_1 + \beta p_2)(x) &= (x+1)(\alpha p_1 + \beta p_2)(x+1) - x(\alpha p_1 + \beta p_2)(x) \\
&= \alpha(x+1)p_1(x+1) + \beta(x+1)p_2(x+1) - \alpha x p_1(x) - \beta x p_2(x) \\
&= \alpha(x+1)p_1(x+1) - \alpha x p_1(x) + \beta(x+1)p_2(x+1) - \beta x p_2(x) = \alpha(Tp_1)(x) + \beta(Tp_2)(x)
\end{aligned}$$

より T は V_n 上の線形変換である.

(2) V_4 の基底 $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ について

$$\begin{aligned}
&T1 = (x+1) - x = 1, \qquad Tx = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1, \qquad Tx^2 = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2+3x+1, \\
&Tx^3 = (x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \qquad Tx^4 = (x+1)^5 - x^5 = 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1
\end{aligned}$$

だから, この基底に関する表現行列を A とすれば

$$T(1, x, x^2, x^3, x^4) = (T(1), T(x), T(x^2), T(x^3), T(x^4)) = (1, x, x^2, x^3, x^4)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = (1, x, x^2, x^3, x^4)A$$

となる. その形より A の固有値は $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$ であり, $A - \lambda E_n$ をそれぞれ簡約化すれば

$$A - E_5 = \begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3-1 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4-1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - 2E_5 = \begin{bmatrix} 1-2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3-2 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4-2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - 3E_5 = \begin{bmatrix} 1-3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-3 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3-3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4-3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5-3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - 4E_5 = \begin{bmatrix} 1-4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-4 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3-4 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4-4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5-4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - 5E_5 = \begin{bmatrix} 1-5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-5 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3-5 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4-5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるから,

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = 1+x, \quad p_3(x) = 2+3x+x^2, \quad p_4(x) = 6+11x+6x^2+x^3, \quad p_5(x) = 24+50x+35x^2+10x^3+x_4$$

とすれば, 最高次を比較する事で $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x)\}$ は V_4 の基底であり, $(Tp_i)(x) = ip_i(x) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ が成立する. 従ってこの基底に関する表現行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ となる. □