No.

Date

Def. $(0,\infty)\,(\subset \mathbb{R})$ 上の関数 $f(t)$ に対し

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad \left(= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+0\\ \eta\to+\infty}} \int_\varepsilon^\eta f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right) \qquad (s=\sigma+i\omega\in\mathbb{C})$$

が収束するとき, これを $f(t)$ の "Laplace変換 (Laplace transformation)" と呼び, 収束する s の全体を $\mathcal{L}[f]$ の "収束域 (convergent domain)" と呼ぶ. □

※ $(0,\infty)$ を含む集合上定義される関数に対しても $\mathcal{L}[f]$ が定義される.

※ "単位 step 関数 (unit step function)"

$$u_0(t) := \begin{cases} 0 & (t\leq 0) \\ 1 & (0<t) \end{cases}$$

を用いる事により $(0,\infty)$ を含む $\mathbb{R}$ の部分集合 A 上で定義される関数 $f(t)$ について

$$\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_A u_0(\tau)f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

が成立. Laplace変換の観点より $f(t)$ と $u_0(t)\cdot f(t)$ を同一視し, 混乱の恐れの無い限り, $u_0(t)f(t)$ を $f(t)$ と記す事にする.

No.

Date

Table 1. 基本公式

1. (線形性)

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g] \quad (\alpha, \beta \text{は定数})$$

2. (相似性)

$$\mathcal{L}[f(\alpha t)](s) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

3. (第1推移定理)

$$\mathcal{L}[u_0(t-\beta) \cdot f(t-\beta)](s) = e^{-\beta s} \mathcal{L}[f](s) \quad (\beta > 0)$$

(第2推移定理)

$$\mathcal{L}[u_0(t) \cdot f(t+\beta)](s) = e^{\beta s} \left\{ \mathcal{L}[f](s) - \int_0^\beta e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau \right\} \quad (\beta > 0)$$

(第3推移定理)

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-\alpha)$$

4. (微分公式)

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right](s) = s^n \mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \frac{d^k f}{dt^k}(+0)$$

$$\mathcal{L}[(-t)^n f(t)](s) = \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f(t)](s)$$

5 (積分公式)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^{\tau_{n-1}} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau)\, d\tau\, d\tau_1 \cdots d\tau_{n-1}\right](s) = \frac{1}{s^n} \mathcal{L}[f(t)](s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right](s) = \int_s^\infty \int_{\sigma_{n-1}}^\infty \cdots \int_{\sigma_1}^\infty \mathcal{L}[f](\sigma)\, d\sigma\, d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-1}$$

6. (合成定理)

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \cdot \mathcal{L}[g(t)](s)$$

$$\left((f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) \cdot g(\tau)\, d\tau \text{ とする.} \right)$$

No.

Date

(証明) 以下 積分の存在は保障されるものと仮定し、計算部分のみ扱う.

1. (線型性) 自明.

2. (相似性)

$$\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-st}dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\alpha t)\, e^{-\frac{s}{\alpha}\cdot(\alpha t)}d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{s}{\alpha}\tau}d\tau$$

3. (その1) $\int_0^\infty u_0(t-\beta)f(t-\beta)e^{-st}dt = \int_\beta^\infty f(t-\beta)e^{-s(t-\beta)-s\beta}dt = e^{-s\beta}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$.

(その2) $\int_0^\infty u_0(t)f(t+\beta)e^{-st}dt = \int_{-\beta}^\infty f(t+\beta)e^{-st}dt - \int_{-\beta}^0 f(t+\beta)e^{-st}dt$

$$= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau+s\beta}d\tau - \int_0^\beta f(\tau)e^{-s\tau+s\beta}d\tau = e^{s\beta}\left\{\mathcal{L}[f](s) - \int_0^\beta e^{-s\tau}f(\tau)d\tau\right\}$$

(その3) $\int_0^\infty e^{\alpha t}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-\alpha)t}dt = \mathcal{L}[f](s-\alpha)$

4. (微分公式) $n=0$ のときは自明.

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = \mathcal{L}\left[\frac{df^{(n-1)}}{dt}(t)\right](s) = s\mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)](s) - f^{(n-1)}(+0)$$
$$= s\left(s^{n-1}\mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-2-k}f^{(k)}(+0)\right) - f^{(n-1)}(+0)$$

$$\mathcal{L}[(-t)^n f(t)](s) = \frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[(-t)^{n-1}f(t)](s)\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\mathcal{L}[f](s)\right)$$

5. (積分公式) $n=0$ のときは自明.

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t\cdots\int_0^{\tau_1}f(\tau)d\tau\cdots d\tau_{n-1}\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\int_0^{\tau_{n-1}}\cdots\int_0^{\tau_1}f(\tau)d\tau\cdots d\tau_{n-2}\right](s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^{n-1}}\mathcal{L}[f](s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^{n-1}}\right](\sigma_{n-1})d\sigma_{n-1} = \int_s^\infty\left(\int_{\sigma_{n-1}}^\infty\cdots\mathcal{L}[f](\sigma)d\sigma\cdots d\sigma_{n-2}\right)d\sigma_{n-1}$$

No.

Date

6(合成定理)

$$\mathcal{L}[f*g](s) = \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\, e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)e^{-st}d\tau dt = \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}dt d\tau$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)\cdot \int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-st}dt d\tau = \int_0^\infty f(\tau)\cdot \int_0^\infty g(t')e^{-s(\tau+t')}dt'd\tau \quad (t'=t-\tau\text{と置く})$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\left(\int_0^\infty g(t')e^{-st'}dt'\right)d\tau = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\cdot \int_0^\infty g(t')e^{-st'}dt' \quad ▨$$