【問題】 M を C^∞ 級多様体とし，$C^\infty(M)$ を M 上の C^∞ 級関数全体の集合とする．関数 $h \in C^\infty(M)$ の臨界点全体の集合を $C(h)$ で表す．2 つの関数 $f, g \in C^\infty(M)$ に対して和 $f+g \in C^\infty(M)$ 及び積 $fg \in C^\infty(M)$ はそれぞれ

$$(f+g)(p) = f(p) + g(p), \qquad (fg)(p) = f(p)g(p) \qquad (p \in M)$$

で定義される．以下が成り立つ事を示せ．

(1) $C(f) \cap C(g) \subset C(f+g) \cap C(fg)$.

(2) M の部分集合 L を

$$L = (C(f+g) \cap C(fg)) - (C(f) \cap C(g))$$

で定めるとき，全ての $p \in L$ に対し $f(p) = g(p)$ である．

(3) 次の 2 つの条件は同値である．

(a) $M = C(f+g) \cap C(fg)$.

(b) $M = C(f) \cap C(g)$.

(H28 筑波大数理物質科学研究科)

【解答】 (1) $p \in C(f) \cap C(g)$ のとき，$d(f+g)(p) = df(p) + dg(p) = 0$，$d(fg)(p) = df(p)g(p) + f(p)dg(p) = 0$ より $p \in C(f+g) \cap C(fg)$.

(2) $p \in L$ のとき，L の定義より $df(p) \neq 0$ または $dg(p) \neq 0$ が成立．$df(p) \neq 0$ だとする．$d(f+g)(p) = 0$ より $dg(p) = -df(p)$．また $d(fg)(p) = 0$ より

$$df(p)g(p) + f(p)dg(p) = df(p)(g(p) - f(p)) = 0, \qquad \therefore \quad g(p) - f(p) = 0.$$

$dg(p) \neq 0$ のときも同様.

(3) (1) より (b) $\Rightarrow$ (a) は自明．一方，$M = C(f+g) \cap C(fg)$ だとする．$p \in M - C(f) \cap C(g)$ がとれたとする．$M - C(f) \cap C(g)$ は開集合だから，(2) より $M - C(f) \cap C(g)$ 上で $f = g$，特に $df(p) = dg(p)$ となる．一方，$p \in C(f+g)$ だから $df(p) = -dg(p)$ が成立．上と併せれば $df(p) = dg(p) = 0$，従って $p \in C(f) \cap C(p)$ となるが, これは p のとり方と矛盾する．よって $M - C(f) \cap C(g) = \varnothing$，即ち $M = C(f) \cap C(g)$ となる． $\square$