

【問題】

- (i) 平面上の Riemann 計量  $g = dx^2 + dy^2$  と vector 場

$$X(x, y) = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

について、 $X$  が  $g$  の Killing vector 場となる為の  $\xi, \eta$  の条件を求めよ。

- (ii)  $X, Y$  が共に  $g$  の Killing vector 場ならば、 $aX + bY$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) 及び  $[X, Y]$  もそうである事を示せ。

(H12 東北大学情報科学研究科)

【解答】 (i)  $g(\partial/\partial x, \partial/\partial x)$  等は定数関数であるから、 $X$  が Killing vector 場ならば

$$\begin{aligned} g([X, \frac{\partial}{\partial x}], \frac{\partial}{\partial x}) + g(\frac{\partial}{\partial x}, [X, \frac{\partial}{\partial x}]) &= -2 \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, & g([X, \frac{\partial}{\partial y}], \frac{\partial}{\partial y}) + g(\frac{\partial}{\partial y}, [X, \frac{\partial}{\partial y}]) &= -2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \\ g([X, \frac{\partial}{\partial x}], \frac{\partial}{\partial y}) + g(\frac{\partial}{\partial x}, [X, \frac{\partial}{\partial y}]) &= -\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

最初の 2 式より  $\xi = f(y)$ ,  $\eta = g(x)$  という形であり、第 3 式より  $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$  となる。この等式が成立するのは両辺が同じ定数  $c$  のときのみ。従って  $\eta = g(x) = -cx + c_2$ ,  $\xi = f(y) = cy + c_1$  ( $c_1, c_2$  は任意定数) となる。逆に  $\xi, \eta$  がこの形ならば、任意の  $Y = Y_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial \eta}{\partial y}$ ,  $Z = Z_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + Z_2 \frac{\partial \eta}{\partial y}$  に対し

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &= (cy + c_1)((Y_1)_x Z_1 + Y_1(Z_1)_x + (Y_2)_x Z_2 + Y_2(Z_2)_x) \\ &\quad + (-cx + c_2)((Y_1)_y Z_1 + Y_1(Z_1)_y + (Y_2)_y Z_2 + Y_2(Z_2)_y), \\ g([X, Y], Z) &= (cy + c_1)((Y_1)_x Z_1 + (Y_2)_x Z_2) + (-cx + c_2)((Y_1)_y Z_1 + (Y_2)_y Z_2) \\ &\quad - cY_2 Z_1 + cY_1 Z_2, \\ g(Y, [X, Z]) &= (cy + c_1)(Y_1(Z_1)_x + Y_2(Z_2)_x) + (-cx + c_2)(Y_1(Z_1)_y + Y_2(Z_2)_y) \\ &\quad - cY_1 Z_2 + cY_2 Z_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) &= (cy + c_1)((Y_1)_x Z_1 + (Y_2)_x Z_2 + Y_1(Z_1)_x + Y_2(Z_2)_x) \\ &\quad + (-cx + c_2)((Y_1)_y Z_1 + (Y_2)_y Z_2 + Y_1(Z_1)_y + Y_2(Z_2)_y) = X(g(Y, Z)). \end{aligned}$$

よって  $X$  が  $g$  の Killing vector 場である為には  $\xi = cy + c_1$ ,  $\eta = -cx + c_2$  ( $c, c_1, c_2$  は任意定数) となる事が必要十分である。

- (ii) 任意の  $Z, W \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$  に対し

$$\begin{aligned} (aX + bY)(g(Z, W)) &= aX(g(Z, W)) + bY(g(Z, W)) \\ &= ag([X, Z], W) + ag(Z, [X, W]) + bg([Y, Z], W) + bg(Z, [Y, W]) \\ &= ag([X, Z], W) + bg([Y, Z], W) + ag(Z, [X, W]) + bg(Z, [Y, W]) \\ &= g([aX + bY, Z], W) + g(Z, [aX + bY, W]), \end{aligned}$$

より  $aX + bY$  は  $g$  の Killing vector 場である。

$$\begin{aligned} [X, Y](g(Z, W)) &= X(Y(g(Z, W))) - Y(X(g(Z, W))) \\ &= X(g([Y, Z], W) + g(Z, [Y, W])) - Y(g([X, Z], W) + g(Z, [X, W])) \\ &= g([X, [Y, Z]], W) + 2g([Y, Z], [X, W]) + g(Z, [X, [Y, W]]) \\ &\quad - g([Y, [X, Z]], W) - 2g([X, Z], [Y, W]) - g(Z, [Y, [X, W]]) \\ &= g([X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]], W) + g(Z, [X, [Y, W]] - [Y, [X, W]]). \end{aligned}$$

Jacobi 恒等式より  $[[X, Y], \cdot] = [X, [Y, \cdot]] - [Y, [X, \cdot]]$  だから、 $[X, Y](g(Z, W)) = g([[X, Y], Z], W) + g(Z, [[X, Y], W])$ 。従って  $[X, Y]$  も  $g$  の Killing vector 場である。  $\square$

【問題】

- (i) Lie 群  $S = \left\{ \begin{bmatrix} e^t & \xi \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} : t, \xi \in \mathbb{R} \right\}$  が  $\mathbb{H} = \{z = x + \sqrt{-1}y : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$  上に

$$\begin{bmatrix} e^t & \xi \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot z = e^t(e^t z + \xi)$$

により推移的に作用する事を示せ.

- (ii)  $\mathbb{H}$  上の Riemann 計量  $g$  :

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

について, 上の作用は等長である事を示せ.

- (iii)  $X = \begin{bmatrix} a & \xi \\ 0 & -a \end{bmatrix}$  に対して,  $\mathbb{H}$  内の曲線  $c(t) = \exp(tX)\sqrt{-1}$  を求めよ.

(H11 東北大学情報科学研究科)

【解答】 (i)  $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{H}$  に対し  $t = \log \sqrt{y}$ ,  $\xi = x/\sqrt{y}$  と置くと,  $e^t = \sqrt{y}$  より

$$\begin{bmatrix} e^t & \xi \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \sqrt{-1} = e^{2t}\sqrt{-1} + e^t\xi = y\sqrt{-1} + \sqrt{y}\frac{x}{\sqrt{y}} = z$$

だから  $S$  は  $\mathbb{H}$  上推移的に作用する.

- (ii)  $w = u + iv = e^t(e^t z + \xi)$  のとき,  $u = e^{2t}x + e^t\xi$ ,  $v = e^{2t}y$  だから

$$du = e^{2t}dx, \quad dv = e^{2t}dy, \quad \therefore \frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{e^{4t}dx^2 + e^{4t}dy^2}{e^{4t}y^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

故に  $S$  の作用は等長的である.

- (iii)  $X^{2n} = \begin{bmatrix} a^{2n} & 0 \\ 0 & a^{2n} \end{bmatrix}$ ,  $X^{2n+1} = \begin{bmatrix} a^{2n+1} & \xi a^{2n} \\ 0 & -a^{2n+1} \end{bmatrix}$  となる事が容易に確かめられる. これより

$$\exp(tX) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{at}{1!} + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \frac{a^4t^4}{4!} + \dots & \frac{\xi t}{1!} + \frac{\xi a^2t^3}{3!} + \frac{\xi a^4t^5}{5!} + \frac{\xi a^6t^7}{7!} + \dots \\ 0 & 1 - \frac{at}{1!} + \frac{a^2t^2}{2!} - \frac{a^3t^3}{3!} + \frac{a^4t^4}{4!} - \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at} & \frac{\xi}{a} \sinh at \\ 0 & e^{-at} \end{bmatrix}$$

だから  $\exp(tX)\sqrt{-1} = e^{at}(e^{at}\sqrt{-1} + \frac{\xi}{a} \sinh at)$ .  $\exp(tX)\sqrt{-1} = x + \sqrt{-1}y$  とすれば

$$x = \frac{\xi}{2a}(e^{2at} - 1) = \frac{\xi}{2a}(y - 1),$$

即ち  $\exp(tX)\sqrt{-1}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) は直線  $2ax - \xi y + \xi = 0$  と  $\mathbb{H}$  との共通部分を表す (特に  $t \rightarrow -\infty$  ならば  $\exp(tX)\sqrt{-1} \rightarrow -\xi/2a + \sqrt{-1} \cdot 0$ ) となる.  $\square$

【問題】

- (i) 同相である 2 つ位相空間は homotopy 同値である事を示せ。  
 (ii) A から Z のアルファベットの文字に、位相空間としての自然な位相を与える。このとき次を示せ。  
 (a) T の文字と I の文字は homotopy 同値だが、同相ではない。  
 (b) T の文字と P の文字は homotopy 同値でも同相ではない。

(H11 東北大学情報科学研究科)

【解答】 (i) 位相空間  $X, Y$  に対し同相写像  $f: X \rightarrow Y$  が存在したとすると、

$$F(t, x) = f^{-1} \cdot f(x), \quad G(t, y) = f \cdot f^{-1} \quad (t \in [0, 1], x \in X, y \in Y)$$

とすれば、 $F$  は  $f^{-1} \cdot f$  と  $1_X$ 、 $G$  は  $f \cdot f^{-1}$  と  $Y$  を結ぶ homotopy であるから、 $f^{-1} \cdot f \simeq 1_X$ 、 $f \cdot f^{-1} \simeq 1_Y$ 。従って  $X, Y$  は homotopy 同値である。

(ii) (a)  $T$  は  $T = T_1 \cup T_2$  ( $T_1 = \{0\} \times [0, 1]$ ,  $T_2 = [-1, 1] \times \{1\}$ )、 $I$  は  $\mathbb{R}^2$  内の部分空間  $I = T_1$  とそれぞれ  $\mathbb{R}^2$  内の部分空間として実現されているとする。  $f: T \rightarrow I$  を  $f(x, y) = (0, y)$  ( $(x, y) \in T_1$ )、 $(0, 1)$  ( $(x, y) \in T_2$ ) より定義し、 $g: I \rightarrow T$  を自然な埋め込みとする。  $F: [0, 1] \times T \rightarrow T$ ,  $F(t, x, y) = (tx, y)$  とすれば、 $F$  は連続であり、 $F(1, x, y) = 1_T$ 、 $F(0, x, y) = g \cdot f$  となるから  $F$  は  $1_T$  から  $g \cdot f$  への homotopy となる。また  $f \cdot g = 1_I$  と併せて  $T$  と  $I$  は homotopy 同値となる。

次に同相だとし、 $f$  を  $T$  から  $I$  への同相写像だとし、 $p = (0, 1)$ 、 $q = f(0, 1)$  と置く。このとき  $T - \{p\}$  の弧状連結成分は 3 個だが、 $I - \{q\}$  の弧状連結成分は高々 2 個だから、これは  $f$  が同相写像である事に反する。故に  $T$  から  $I$  への同相写像は存在しない。

(b)  $P$  を  $T = T_1 \cup P_2$  ( $P_2 = \{(x, y) : x^2 + (y - \frac{3}{4})^2 = \frac{1}{4^2}, x \geq 0\}$ )、と  $\mathbb{R}^2$  内の部分空間として実現されているとする。同相だとし、 $f$  を  $T$  から  $P$  への同相写像だとし、 $p = (0, 1)$ 、 $q = f(0, 1)$  と置く。このとき  $T - \{p\}$  の弧状連結成分は 3 個だが、 $P - \{q\}$  の弧状連結成分は高々 2 個だから、これは  $f$  が同相写像である事に反する。故に  $T$  は  $P$  と同相ではない。また  $T$  は単連結だが、 $P$  の基本群は  $\mathbb{Z}$  と同型なので  $T, P$  は homotopy 同値ではない。  $\square$

※ 「位相空間としての自然な位相」ってなんだろう・・・

※ 確認の為、「 $X, Y$  が homotopy 同値ならば基本群  $\pi_1(X)$ ,  $\pi_1(Y)$  は同型となる」を証明。

【証明】 連続写像  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow X$  に対し homotopy

$$F: [0, 1] \times X \rightarrow X, \quad F(0, x) = x, F(1, x) = g \cdot f(x) \quad (x \in X),$$

$$G: [0, 1] \times Y \rightarrow Y, \quad G(0, y) = y, G(1, y) = f \cdot g(y) \quad (y \in Y)$$

が存在したとする。また  $x_0 \in X$  を基点とし、 $y_0 = f(x_0)$  とする。  $f, g$  より群の準同型

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad f_*[\gamma] = [f \cdot \gamma], \quad g_*: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0), \quad g_*[\gamma] = [g \cdot \gamma]$$

が導かれる。  $\gamma \in \Omega(X, x_0)$  に対し  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ ,  $H(t, s) = F(t, \gamma(s))$  は連続写像であり、 $H(0, s) = \gamma(s)$ ,  $H(1, s) = g \cdot f(\gamma(s))$ 、従って  $H$  は  $\gamma$  と  $(g \cdot f)_*(\gamma)$  との間の homotopy となり、故に  $g_* \cdot f_*([\gamma]) = [g \cdot f(\gamma)]$  となる。逆も同様に  $f_* \cdot g_*([\gamma]) = [f \cdot g(\gamma)]$  ( $\gamma \in \Omega(Y, y_0)$ ) が成立。故に  $f_*$  は  $\pi_1(X, x_0)$  から  $\pi_1(Y, y_0)$  への同型射となる。  $\square$

【問題】  $\mathbb{R}^3$  上のベクトル場  $X, Y, Z$  を

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z}$$

により定義する.

- (i) 交換子積  $[X, Y], [Y, Z], [Z, X]$  を求めよ.  
 (ii)  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  に対して、微分同相写像  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$\varphi(x, y, z) = (x + a, y + b, z + ay + c)$$

により定義するとき、 $\varphi_* X, \varphi_* Y, \varphi_* Z$  を求めよ.

(H10 東北大学理学研究科数学)

【解答】 (i) 一般に  $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$  となる事に注意して

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x}(x) \frac{\partial}{\partial z} + x \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial z}, \\ [Y, Z] &= \left[ \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial z}(x) \frac{\partial}{\partial z} + x \left[ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = 0, \\ [Z, X] &= \left[ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \right] = 0 \end{aligned}$$

より  $[X, Y] = Z, [Y, Z] = [Z, X] = 0$ .

(ii) 一般のベクトル場  $\tilde{X}$  に対し  $\varphi_* \tilde{X} = \tilde{X}(x+a) \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{X}(y+b) \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{X}(z+ay+c) \frac{\partial}{\partial z}$  となるから、

$$\begin{aligned} \varphi_* X &= \frac{\partial(x+a)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial(y+b)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial(z+ay+c)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}, \\ \varphi_* Y &= \left( \frac{\partial(x+a)}{\partial y} + x \frac{\partial(x+a)}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( \frac{\partial(y+b)}{\partial y} + x \frac{\partial(y+b)}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left( \frac{\partial(z+ay+c)}{\partial y} + x \frac{\partial(z+ay+c)}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} + (a+x) \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} + a \frac{\partial}{\partial z}, \\ \varphi_* Z &= \frac{\partial(x+a)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial(y+b)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial(z+ay+c)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

より  $\varphi_* X = X, \varphi_* Y = Y + aZ, \varphi_* Z = Z$ . □

【問題】  $\mathbb{R}^{2m+2}$  での 1 次微分形式  $\tilde{\eta} = x_2 dx_1 - x_1 dx_2 + x_4 dx_3 - x_3 dx_4 + \cdots + x_{2m+2} dx_{2m+1} - x_{2m+1} dx_{2m+2}$  を  $2m+1$  次元球面  $\mathbb{S}^{2m+1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{2m+2}) \in \mathbb{R}^{2m+2} : \sum_{i=1}^{2m+2} x_i^2 = 1\}$  に制限したものを  $\eta$  とする.  $\eta \wedge (d\eta)^m$  は  $\mathbb{S}^{2m+1}$  上の全ての点で 0 にならない事を示せ.

(S55 東北大学理学研究科数学 改題)

【解答】 以下  $\wedge$  により除去を表す.  $d\tilde{\eta}$ ,  $(d\tilde{\eta})^m$ , 及び  $\tilde{\eta} \wedge (d\tilde{\eta})^m$  は次の通り :

$$\begin{aligned} d\tilde{\eta} &= 2 \sum_{i=1}^{m+1} dx_{2i-1} \wedge dx_{2i} \\ (d\tilde{\eta})^m &= 2^m m! \sum_{i=1}^{m+1} (dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{(dx_{2i-1} \wedge dx_{2i})} \wedge \cdots \wedge dx_{2m+1} \wedge dx_{2m+2}) \\ \tilde{\eta} \wedge (d\tilde{\eta})^m &= 2^m m! \sum_{i=1}^{m+1} (dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge (x_{2i} dx_{2i-1} - x_{2i-1} dx_{2i}) \wedge \cdots \wedge dx_{2m+1} \wedge dx_{2m+2}) \\ &= 2^m m! \sum_{i=1}^{2m+2} (-1)^i x_i (dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{2m+2}) \end{aligned}$$

$\iota : \mathbb{S}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2m+2}$  を標準埋め込みとする.  $1 \leq i \leq 2m+2$  に対し  $U_{i,\pm} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{2m+1} : \pm x_i > 0\}$  とすれば  $U_{i,\pm}$  は  $\mathbb{S}^{2m+1}$  の開集合であり,

$$\varphi_{i,\pm} : U_{i,\pm} \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}, \quad \varphi_{i,\pm}(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{2m+2})$$

は  $U_{i,\pm}$  上の局所座標系となる. 逆写像は

$$\varphi_{i,\pm}^{-1}(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|_i^2}, x_{i+1}, \dots, x_{2m+2}) \quad \left( \begin{array}{l} \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{2m+2}) \\ \|\mathbf{x}\|_i = \sqrt{x_1^2 + \cdots + \widehat{x_i^2} + \cdots + x_{2m+2}^2} \end{array} \right)$$

により与えられる.  $U_{i,\pm}$  上で  $\iota^*(dx^i) = \mp \sum_{j \neq i} \frac{x_j dx_j}{\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|_i^2}}$ ,  $\iota^*(dx^j) = dx^j$  ( $j \neq i$ ) となるから,

$$\begin{aligned} &\iota^*(x^i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{2m+2}) \\ &= \pm \sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|_i^2} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{2m+2}, \\ &\iota^*(x_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_{2m+2}) \\ &= x^j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge \iota^*(dx^i) \wedge \cdots \wedge dx_{2m+2} \\ &= \mp x_j \sum_{l \neq i} \frac{x_l}{\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|_i^2}} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_l \wedge \cdots \wedge dx_{2m+2} \\ &= \pm (-1)^{i-j} \frac{x_j^2}{\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|_i^2}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_j \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{2m+2} \quad (j \neq i) \end{aligned}$$

となる. 従って

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^m m!} \eta \wedge (d\eta)^m &= \frac{1}{2^m m!} \iota^*(\tilde{\eta} \wedge (d\tilde{\eta})^m) \\ &= \iota^*((-1)^i x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{2m+2}) + \sum_{j \neq i} (-1)^j \iota^*(x_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_{2m+2}) \\ &= \pm (-1)^i \frac{1}{\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|_i^2}} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{2m+2} \\ \therefore \eta \wedge (d\eta)^m &= \pm (-1)^i 2^m m! \frac{1}{\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|_i^2}} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{2m+2} \end{aligned}$$

この表示より  $U_{i,\pm}$  上で  $\eta \wedge (d\eta)^m \neq 0$  となる事が分かる. □

〈備考〉 オリジナルは S55 東北大学理学研究科 数学専攻の

【問題】  $\mathbb{R}^4$  での 1 次微分形式  $\tilde{\eta} = x_2 dx_1 - x_1 dx_2 + x_4 dx_3 - x_3 dx_4$  を  $\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1\}$  に制限したものを  $\eta$  とする.  $\eta d\eta$  は  $\mathbb{S}^3$  上の全ての点で 0 にならない事を示せ.

という問題.  $\eta$  は  $\mathbb{S}^3$  上の基本 1 形式と呼ばれる,  $\mathbb{S}^3$  上に接触構造と呼ばれる構造を定義する 1 次微分形式である. 上記問題は  $\eta$  が奇数次元の球面上の基本 1 形式である事を示した事になる.  $\square$