【問題】 U を $\mathbb{R}^2$ の領域とし，空間 $\mathbb{R}^3$ 内において $\boldsymbol{p}(u,v)$ $((u,v)\in U)$ と径数表示された滑らかな曲面を S とする．また λ を正の定数とし，S を λ 倍相似拡大・縮小した曲面を $\tilde{S}$ とする．即ち $\tilde{S}$ は $\tilde{\boldsymbol{p}}(u,v)=\lambda\boldsymbol{p}(u,v)$ $((u,v)\in U)$ と径数表示された曲面である．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{p}$ の Gauss 曲率 K と $\tilde{\boldsymbol{p}}(u,v)$ の Gauss 曲率 $\tilde{K}$ について，$\tilde{K}=\dfrac{1}{\lambda^2}K$ が成り立つ事を示せ．

(2) $\boldsymbol{p}(u,v)$ の平均曲率 H と $\tilde{\boldsymbol{p}}(u,v)$ の平均曲率 $\tilde{H}$ について，$\tilde{H}=\dfrac{1}{\lambda}H$ が成り立つ事を示せ．

(3) D は U に含まれる有界閉領域で滑らかな境界を持つものとする．このとき，

$$\int_D KdA=\int_D \tilde{K}d\tilde{A}$$

が成り立つ事を示せ．ただし dA と $d\tilde{A}$ はそれぞれ曲面 $\boldsymbol{p}$ と $\tilde{\boldsymbol{p}}$ の面積要素とする．

(H31 首都大理学研究科 数学専攻)

【解答】 (x^1,x^2,x^3) を $\mathbb{R}^3$ の標準座標系とし，$p^i=x^i\cdot\boldsymbol{p}$, $\tilde{p}^i=x^i\cdot\tilde{\boldsymbol{p}}$ $(=\lambda p^i)$ とする．また $\frac{\partial}{\partial x^i}$ を ∂_{x^i} 等と記す．このとき $S,\tilde{S}$ の第 1 基本量を $g_{ij},\tilde{g}_{ij}$ $(i,j=u,v)$ とすれば

$$\tilde{g}_{uu}=\sum_{i=1}^{3}(\tilde{p}^i_u)^2=\lambda^2\sum_{i=1}^{3}(p^i_u)^2=\lambda^2 g_{uu}$$

等の計算より $\tilde{g}_{ij}=\lambda^2 g_{ij}$ となる事が分かる．$S,\tilde{S}$ の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n},\tilde{\boldsymbol{n}}$ については

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{n}}=&\frac{(\tilde{p}^2_u\tilde{p}^3_v-\tilde{p}^3_u\tilde{p}^2_v)\partial_{x^1}+(\tilde{p}^3_u\tilde{p}^1_v-\tilde{p}^1_u\tilde{p}^3_v)\partial_{x^2}+(\tilde{p}^1_u\tilde{p}^2_v-\tilde{p}^2_u\tilde{p}^1_v)\partial_{x^3}}{\{(\tilde{p}^2_u\tilde{p}^3_v-\tilde{p}^3_u\tilde{p}^2_v)^2+(\tilde{p}^3_u\tilde{p}^1_v-\tilde{p}^1_u\tilde{p}^3_v)^2+(\tilde{p}^1_u\tilde{p}^2_v-\tilde{p}^2_u\tilde{p}^1_v)^2\}^{1/2}}\\ =&\frac{\lambda^2\{(p^2_up^3_v-p^3_up^2_v)\partial_{x^1}+(p^3_up^1_v-p^1_up^3_v)\partial_{x^2}+(p^1_up^2_v-p^2_up^1_v)\partial_{x^3}\}}{\lambda^2\{(p^2_up^3_v-p^3_up^2_v)^2+(p^3_up^1_v-p^1_up^3_v)^2+(p^1_up^2_v-p^2_up^1_v)^2\}^{1/2}}\end{aligned}$$

だから $\tilde{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{n}$ となる．$\boldsymbol{n}=n^1\partial_{x^1}+n^2\partial_{x^2}+n^3\partial_{x^3}$ と置くとき，$S,\tilde{S}$ の第 2 基本量を $h_{ij},\tilde{h}_{ij}$ $(i,j=u,v)$ とすれば

$$\tilde{h}_{uu}=n^1\tilde{p}^1_{uu}+n^2\tilde{p}^2_{uu}+n^3\tilde{p}^3_{uu}=\lambda h_{uu}$$

等の計算より $\tilde{h}_{ij}=\lambda h_{ij}$ となる事が分かる．

(1) 上述の主張より

$$\tilde{K}=\frac{\tilde{h}_{uu}\tilde{h}_{vv}-\tilde{h}^2_{uv}}{\tilde{g}_{uu}\tilde{g}_{vv}-\tilde{g}^2_{uv}}=\frac{\lambda^2(h_{uu}h_{vv}-h^2_{uv})}{\lambda^4(g_{uu}g_{vv}-g^2_{uv})},\qquad \therefore\quad \tilde{K}=\frac{1}{\lambda^2}K.$$

(2) 上述の主張より

$$\tilde{H}=\frac{\tilde{g}_{uu}\tilde{h}_{vv}+\tilde{g}_{vv}\tilde{h}_{uu}-2\tilde{g}_{uv}\tilde{h}_{uv}}{2(\tilde{g}_{uu}\tilde{g}_{vv}-\tilde{g}^2_{uv})}=\frac{\lambda^3(g_{uu}hvv+g_{vv}h_{uu}-2g_{uv}h_{uv})}{2\lambda^4(g_{uu}g_{vv}-g^2_{uv})},\qquad \therefore\quad \tilde{H}=\frac{1}{\lambda}H.$$

(3) $S,\tilde{S}$ の面積要素 $dA,d\tilde{A}$ について

$$\begin{aligned}d\tilde{A}=&\{(\tilde{p}^2_u\tilde{p}^3_v-\tilde{p}^3_u\tilde{p}^2_v)^2+(\tilde{p}^3_u\tilde{p}^1_v-\tilde{p}^1_u\tilde{p}^3_v)^2+(\tilde{p}^1_u\tilde{p}^2_v-\tilde{p}^2_u\tilde{p}^1_v)^2\}^{1/2}dudv\\ =&\lambda^2\{(p^2_up^3_v-p^3_up^2_v)^2+(p^3_up^1_v-p^1_up^3_v)^2+(p^1_up^2_v-p^2_up^1_v)^2\}^{1/2}dudv=\lambda dA\end{aligned}$$

だから，(1) と併せて $\displaystyle\int_D\tilde{K}d\tilde{A}=\int_D\frac{1}{\lambda^2}K\cdot\lambda^2dA=\int_D KdA.$ □

【問題】 a を正の定数として，関数 $z = a(x^2 + y^2)$ のグラフとして与えられる $\mathbb{R}^3$ 内の曲面を S とする．以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 S のパラメータ表示を一つ与えよ．
(2) (1) で与えたパラメータ表示を用いて，曲面 S の Gauss 曲率 K と平均曲率 H を求めよ．
(3) $t > 0$ として，S の z 成分が t 以下の部分を S_t とする．すなわち，

$$S_t = \{(x, y, z) \in S : \ z \leq t\ \}$$

である．S_t 上での Gauss 曲率 K の積分 $\displaystyle\int_{S_t} K dA$ を求め，更に極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_{S_t} K dA$ の値を求めよ．ただし dA は S_t の面素を表すとする．

(H29 首都大理学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) $\varphi(x^1, x^2) = (x^1, x^2, a((x^1)^2 + (x^2)^2))$ $((x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2)$ が S のパラメータとなる．

(2) (x^1, x^2, x^3) を $\mathbb{R}^3$ の標準座標系，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $\mathbb{R}^3$ の標準内積とする．$\iota : S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ を自然な埋め込み，g を ι により $\langle\cdot,\cdot\rangle$ から誘導された S 上の計量とする．$d\iota\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x^1} + 2ax^1\frac{\partial}{\partial x^3}$，$d\iota\frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^2} + 2ax^2\frac{\partial}{\partial x^3}$ より

$$g = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}dx^i dx^j, \qquad g_{11} = 1 + 4a^2(x^1)^2,\ g_{12} = g_{21} = 4a^2x^1x^2,\ g_{22} = 1 + 4a^2(x^2)^2$$

となる．S の点 p に於ける法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n} = -\frac{2ax^1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{2ax^2}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x^3}, \qquad (\Delta = \sqrt{4a^2(x^1)^2 + 4a^2(x^2)^2 + 1}).$$

従って第 2 基本形式は $\Pi = \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}dx^i dx^j$，$h_{11} = h_{22} = \frac{2a}{\Delta}$，$h_{12} = h_{21} = 0$.

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \Delta^2, \qquad g_{11}h_{22} + g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{21} = 2a\frac{1+\Delta^2}{\Delta}, \qquad h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = \frac{4a^2}{\Delta^2}$$

だから，Gauss 曲率及び平均曲率はそれぞれ

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} = \frac{4a^2}{\Delta^4}, \qquad H\frac{g_{11}h_{22} + g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})} = a\frac{1+\Delta^2}{\Delta^3}.$$

(3) $dA = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}dx^1dx^2 = \Delta dx^1 dx^2$ より $D_t = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : (x^1) + (x^2)^2 \leq t/a\}$ とすると $\displaystyle\int_{S_t} K dA = 4a^2\int_{D_t}\frac{dx^1dx^2}{\Delta^3}$．さらに極座標 $x^1 = r\cos\theta$，$x_2 = r\sin\theta$ を用いれば

$$\begin{aligned}\int_{S_t} K dA &= \int_{D'_t}\frac{rdrd\theta}{\Delta^3} \qquad D'_t = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq \sqrt{(t/a)},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{(t/a)}}\frac{rdr}{(1+4a^2r^2)^{3/2}}\right)d\theta = 2\pi\left[-\frac{1}{2a^2\sqrt{1+4a^2r^2}}\right]_0^{\sqrt{(t/a)}} = \frac{\pi}{a^2}\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right\}.\end{aligned}$$

さらにこの結果より

$$\lim_{t\to\infty}\int_{S_t} K dA = \lim_{t\to\infty}\frac{\pi}{a^2}\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right\} = \frac{\pi}{a^2}.$$

□