【問題】

[1] $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}^n = \|\boldsymbol{r}\|$ とする．特に $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{o}$ とする．

(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$ (2) $\nabla \boldsymbol{r}^n$ (3) $\nabla \cdot (\boldsymbol{r}^n \boldsymbol{r})$ をそれぞれ求めよ．

[2] $C : \boldsymbol{r} = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}$ $(0 \leq t \leq \pi)$, $\varphi(\boldsymbol{r}) = zx$ とする．

(1) $\|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\|$ を求めよ．

(2) 曲線 C の長さ $\displaystyle\int_C ds$ を求めよ．

(3) C 上でのスカラー関数 φ を t を用いて表せ．

(4) C に沿った線積分 $\displaystyle\int_C \varphi ds$ を求めよ．

(H23 東京農業工業大学工学府電気電子工学専攻)

【解答】 **[1]** (1) $\nabla \cdot \boldsymbol{r} = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial y}{\partial z} = 3$

(2)

$$\nabla \boldsymbol{r}^n = \frac{\partial \|\boldsymbol{r}\|}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \|\boldsymbol{r}\|}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \|\boldsymbol{r}\|}{\partial z}\boldsymbol{k} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\boldsymbol{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\boldsymbol{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}^n}$$

(3) $\nabla \cdot (\boldsymbol{r}^n \boldsymbol{r}) = \dfrac{\partial(x\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial x} + \dfrac{\partial(y\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial y} + \dfrac{\partial(z\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial z}$.

$$\frac{\partial(x\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial x} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\|\boldsymbol{r}\|^2 + x^2}{\|\boldsymbol{r}\|}$$

であり，他の変数についても同様の計算をすれば

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{r}^n \boldsymbol{r}) = \frac{\|\boldsymbol{r}\|^2 + x^2}{\|\boldsymbol{r}\|} + \frac{\|\boldsymbol{r}\|^2 + y^2}{\|\boldsymbol{r}\|} + \frac{\|\boldsymbol{r}\|^2 + z^2}{\|\boldsymbol{r}\|} = \frac{4\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{r}\|} = 4\boldsymbol{r}^n$$

[2] (1) $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -a\sin t\boldsymbol{i} + a\cos t\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}$ より $\left\|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right\| = \sqrt{a^2+b^2}$.

(2) $ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}dt = \left\|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right\|dt = \sqrt{a^2+b^2}dt$ より

$$\int_C ds = \int_0^\pi \sqrt{a^2+b^2}dt = \pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

(3) $\varphi(\boldsymbol{r}) = bt \cdot a\cos t = abt\cos t$.

(4) $\displaystyle\int_C \varphi ds = \int_0^\pi abt\cos t\sqrt{a^2+b^2}dt = ab\sqrt{a^2+b^2}\left\{\left[t\sin t\right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t dt\right\} = -2ab\sqrt{a^2+b^2}$. □