【問題】 $\mathbf{D}^2=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}$, $\mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$, $z_0=1\in\mathbb{S}^1$, X を位相空間, 点 $x_0\in X$ とする.

(1) 連続写像 $f:\mathbb{S}^1\to X$ が定値写像 $c:\mathbb{S}^1\to X$, $c(z)=x_0$ と homotopic である必要十分条件は $\tilde{f}\big|_{\mathbb{S}^1}=f$ となる連続写像 $\tilde{f}:\mathbf{D}^2\to X$ が存在する事である事を示せ.

(2) 連続写像 $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$

$$f(e^{2\pi it})=\begin{cases}(e^{8\pi it},z_0) & (0\le t\le 1/4)\\ (z_0,e^{2\pi i(4t-1)}) & (1/4\le t\le 1/2)\\ (e^{2\pi i(-4t+3)},z_0) & (1/2\le t\le 3/4)\\ (z_0,e^{2\pi i(-4t+4)}) & (3/4\le t\le 1)\end{cases}$$

に対して $\tilde{f}\big|_{\mathbb{S}^1}=f$ となる連続写像 $\tilde{f}:\mathbf{D}^2\to\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ が存在する事を示せ.

(H20 静岡大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 $I=[0,1]$ とする.

(1) $\tilde{f}\big|_{\mathbb{S}^1}=f$ となる連続写像 $\tilde{f}:\mathbf{D}^2\to X$ が存在したとする. $D^2=\{re^{2\pi it}\in\mathbb{C}:0\le r\le 1,\ 0\le t\le 1\}$ と表される事に注意し,

$$F:I\times\mathbb{S}^1\to X,\qquad F(r,e^{2\pi it})=\tilde{f}(re^{2\pi it}),\qquad x_0=\tilde{f}(0)$$

とすれば F は c から f への homotopy となる.

次に $I\times\mathbb{S}^1$ から商空間 $(I\times\mathbb{S}^1)/(0\times\mathbb{S}^1)$ への射影を π とする. $\pi(r,e^{2\pi it})\mapsto re^{2\pi it}$ という対応により $(I\times\mathbb{S}^1)/(0\times\mathbb{S}^1)$ と $\mathbf{D}^2$ と同一視しておく. 今, $F:I\times\mathbb{S}^1\to X$ を c から f への homotopy だとすれば, F は $0\times\mathbb{S}^1$ を 1 点に写すから, 右図を可換にする $\mathbf{D}^2$ から X への連続写像 $\tilde{f}$ が一意的に存在する. $\mathbb{S}^1$ と $\pi(1\times\mathbb{S}^1)$ を同一視すれば

$$\begin{tikzcd} I\times\mathbb{S}^1 \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbf{D}^2 \arrow[d, dotted, "\tilde{f}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$$\tilde{f}(\pi(1,z))=F(1,z)=f(z)\qquad(z\in\mathbb{S}^1)$$

だから $\tilde{f}$ は f の拡張となる.

(2) 写像 $F:I\times I\to\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ を

$$F(s,t):=\begin{cases}(e^{8\pi ist},z_0) & (0\le t\le 1/4)\\ (e^{2\pi is},e^{2\pi is(4t-1)}) & (1/4\le t\le 1/2)\\ (e^{2\pi is(-4t+3)},e^{2\pi is}) & (1/2\le t\le 3/4)\\ (z_0,e^{2\pi is(-4t+4)}) & (3/4\le t\le 1)\end{cases}$$

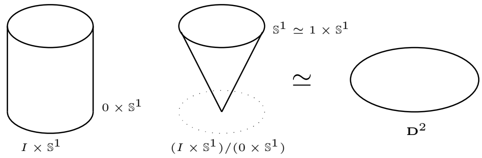
により定義する. F は連続であり, $s\in I$, $t\in I$ に対し

$$F(s,0)=F(s,1)=(z_0,z_0),\qquad F(0,t)=(z_0,z_0),\qquad F(1,t)=f(e^{2\pi it})$$

だから F は f から定値写像 $c(z)=(z_0,z_0)$ への homotopy となる. (1) より $\tilde{f}\big|_{\mathbb{S}^1}=f$ となる連続写像 $\tilde{f}:\mathbf{D}^2\to\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ が存在する. □

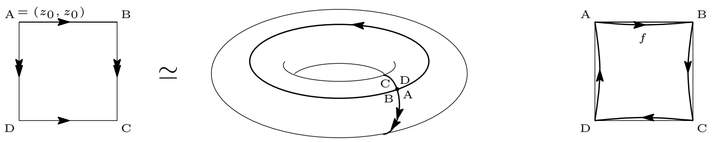
〈備考〉

(1) 商空間 $(I\times\mathbb{S}^1)/(0\times\mathbb{S}^1)$ のイメージは右図の通り:



(2) トーラス $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ は矩形 ABCD を AB と CD, BC と AD をそれぞれ同一視する事で得られる図形と同一視できる. 点 A と (z_0,z_0) を同一視するとき, 上の写像 f は A→ B→ C→ D という閉曲線の事であり, 矩形上でこの閉曲線を 1 点 A に連続的に

縮めれば，f が定値曲線に homotopic となる事が直感的に理解できる．



$\square$

【問題】 M を n 次元 C^∞ 多様体 N の部分集合とし，m は $1 \leq m < n$ を満たす整数とする．M の任意の点 p に対し p を中心とする N の局所座標近傍 $\{U, (y^1, \cdots, y^n)\}$ が存在し

$$M \cap U = \{x \in U \mid y^{m+1}(x) = \cdots = y^n(x) = 0\ \}$$

が成り立つとき，M を N の正則部分多様体という．

(1) M には N から自然に m 次元 C^∞ 級多様体の構造が誘導されることを示せ．

(2) n 次元球面 $\mathbb{S}^n = \left\{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}$ は affine 空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の正則部分多様体である事を示せ．

(H18 静岡大学理学研究科　数学)

【解答】 (1) M には N からの相対位相を定義すれば，M は再び Hausdorff 空間になる．仮定より任意の点 $p \in M$ に対し N に於ける p の近傍 U_p，及び U_p 上の局所座標系 $\varphi_p = (y_p^1, \cdots, y_p^n)$ で

$$U_p \cap M = \{q \in U_p \mid y_p^{m+1}(q) = \cdots = y_p^n(q) = 0\}$$

となるものがとれる．そこで

$$\psi_p : U_p \cap M \to \mathbb{R}^m, \quad \psi_p(q) := (y_p^1(q), \cdots, y_p^m(q))$$

とすれば $\{U_p \cap M\}_{p \in M}$ は M の開被覆であり，$(U_p \cap M) \cap (U_q \cap M) \neq \varnothing$ のとき，$y_q^j \cdot \varphi_p^{-1}$ が $\varphi_p(U_p \cap U_q)$ 上 C^∞ 級だから，

$$y_q^j \cdot \psi_p^{-1}(y_1, \cdots, y_m) = y_q^j \cdot \varphi_p^{-1}(y_1, \cdots, y_m, 0, \cdots, 0)$$

は $(y^1, \cdots, y^m) \in \psi_p((U_p \cap M) \cap (U_q \cap M))$ について C^∞ 級だから $\{(U_p, \psi_p)\}_{p \in M}$ は M 上の C^∞ 級座標近傍系となる．これにより M は m 次元 C^∞ 級多様体となる．

(2) $(x^1, \cdots, x^{n+1})$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の標準座標系とし，$0 < \varepsilon < 1$ とする．$p \in \mathbb{S}^n$ が

$$\begin{aligned}
x^1(p) &= \sin t_n \sin t_{n-1} \ \cdots\ \sin t_3 \sin t_2 \sin t_1, \\
x^2(p) &= \sin t_n \sin t_{n-1} \ \cdots\ \sin t_3 \sin t_2 \cos t_1, \\
x^3(p) &= \sin t_n \sin t_{n-1} \ \cdots\ \sin t_3 \cos t_2, \\
&\cdots \\
x^{n-1}(p) &= \sin t_n \sin t_{n-1} \cos t_{n-2}, \\
x^n(p) &= \sin t_n \cos t_{n-1}, \\
x^{n+1}(p) &= \cos t_n
\end{aligned} \qquad (0 \leq t_1 \leq 2\pi,\ 0 \leq t_2, \cdots, t_n \leq \pi)$$

と表されるとき，

$$U_p = \left\{ (x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \begin{array}{l} x^1 = r \sin\theta_n \ \cdots\ \sin\theta_2 \sin\theta_1, \\ x^2 = r \sin\theta_n \ \cdots\ \sin\theta_2 \cos\theta_1, \\ \quad \cdots \\ x^n = r \sin\theta_n \cos\theta_{n-1}, \\ x^{n+1} = r\cos\theta_n \\ \\ (1-\varepsilon < r < 1+\varepsilon, \quad t_i - \varepsilon < \theta_i < t_n + \varepsilon) \end{array} \right\}$$

とし，U_p 上の関数 $y_p^1, \cdots, y_p^n, y_p^{n+1}$ を

$$\begin{array}{c} y_p^i(q) = \theta_i - t_i \ (i = 1, \cdots, n), \\ y_p^{n+1}(q) = r - 1 \end{array} \qquad \left(\text{ただし} \ \begin{array}{l} x^1(q) = r \sin\theta_n \ \cdots\ \sin\theta_2 \sin\theta_1, \\ x^2(q) = r \sin\theta_n \ \cdots\ \sin\theta_2 \cos\theta_1, \\ \quad \cdots \\ x^n(q) = r \sin\theta_n \cos\theta_{n-1}, \\ x^{n+1}(q) = r\cos\theta_n \\ \\ (1-\varepsilon < r < 1+\varepsilon, \quad t_i - \varepsilon < \theta_i < t_n + \varepsilon) \end{array} \right)$$

により定義する．このとき $(x_p^1, \cdots, x_p^{n+1})$ は U_p 上の局所座標系となる．実際,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial \theta_n} & \frac{\partial x^1}{\partial r} \\ & \cdots & & \\ \frac{\partial x^n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \theta_n} & \frac{\partial x^n}{\partial r} \\ \frac{\partial x^{n+1}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x^{n+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial x^{n+1}}{\partial r} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} r\sin\theta_n\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 & \cdots & r\sin\theta_n\cos\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1 & r\cos\theta_n\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1 & \sin\theta_n\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1 \\ -r\sin\theta_n\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1 & \cdots & r\sin\theta_n\cos\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 & r\cos\theta_n\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 & \sin\theta_n\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -r\sin\theta_n\sin\theta_{n-1} & r\cos\theta_n\cos\theta_{n-1} & \sin\theta_n\cos\theta_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -r\sin\theta_n & \cos\theta_n \end{vmatrix}$$

$$= r^n \sin^{n-1}\theta_n \cdots \sin^3\theta_4 \sin^2\theta_3 \sin\theta_2$$

$$\times \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & \cos\theta_2\sin\theta_1 & \cdots & \cos\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1 & \cos\theta_n\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1 & \sin\theta_n\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_2\cos\theta_1 & \cdots & \cos\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 & \cos\theta_n\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 & \sin\theta_n\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 \\ 0 & -\sin\theta_2 & \cdots & \cos\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 & \cos\theta_n\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 & \sin\theta_n\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\sin\theta_{n-1} & \cos\theta_n\cos\theta_{n-1} & \sin\theta_n\cos\theta_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sin\theta_n & \cos\theta_n \end{vmatrix}$$

最右辺の行列式 を $|D_n|$ とするとき，第 $(n+1)$ 行に関する余因子展開すれば

$$|D_n| = \sin\theta_n \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & \cos\theta_2\sin\theta_1 & \cdots & \cos\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1 & \sin\theta_n\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_2\cos\theta_1 & \cdots & \cos\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 & \sin\theta_n\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 \\ 0 & -\sin\theta_2 & \cdots & \cos\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 & \sin\theta_n\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\sin\theta_{n-1} & \sin\theta_n\cos\theta_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$+ \cos\theta_n \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & \cos\theta_2\sin\theta_1 & \cdots & \cos\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1 & \cos\theta_n\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_2\cos\theta_1 & \cdots & \cos\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 & \cos\theta_n\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 \\ 0 & -\sin\theta_2 & \cdots & \cos\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 & \cos\theta_n\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\sin\theta_{n-1} & \cos\theta_n\cos\theta_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (\sin^2\theta_n + \cos^2\theta_n)|D_{n-1}|$$

$$= |D_{n-1}| = \cdots = |D_2| = \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{vmatrix} = 1$$

だから $\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial r} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x^{n+1}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x^{n+1}}{\partial r} \end{vmatrix} = r^n \sin^{n-1}\theta_n \cdots \sin^3\theta_4 \sin^2\theta_3 \sin\theta_2$ となる．

$(y_p^1, \cdots, y_p^n, y_p^{n+1})$ は $U_p \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上の局所座標系であり，$(y_p^1(p), \cdots, y_p^{n+1}(p)) = (0, \cdots, 0)$ かつ $U_p \cap \mathbb{S}^n = \{q \in \mathbb{S}^n : y_p^{n+1}(q) = 0\}$ となるから，$\mathbb{S}^n$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の正則部分多様体となる． $\square$