【問題】 C を実直線とし,

$$X = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} \qquad (a,b,c>0)$$

と置く.

(ア) $\boldsymbol{p} \in X$ とする. $\boldsymbol{p}$ を通る X 上にある全ての直線を求めよ.

(イ) X の $\mathbb{R}^3$ の部分位相空間と考える. このとき X は円筒:

$$Y = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

と同相である事を示せ.

(S51 岡山大学理学研究科 数学)

【解答】 xy 平面 $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x,y \in \mathbb{R}\}$ と $\mathbb{R}^2$ を同一視する.

(ア) (i) $a=b=c=1,\ \boldsymbol{p} \in X \cap \mathbb{R}^2 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ のとき.

$$\ell : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v} \qquad (\boldsymbol{p} = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \in X\ (0 \le \theta < 2\pi),\ t \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{v} = (u,v,w) \in \mathbb{R}^3,\ \|\boldsymbol{v}\| = 1)$$

を $\boldsymbol{p}$ を通る X 内の直線とするれば

$$(\cos\theta + tu)^2 + (\sin\theta + tv)^2 - (tw)^2 = 1 \qquad (\forall\ t \in \mathbb{R})$$

より $\cos\theta u + \sin\theta v = 0,\ u^2+v^2 = w^2$ が成立. 後者と $u^2+v^2+w^2=1$ より $w = \pm 1/\sqrt{2}$. 前者と併せて $u = (1/\sqrt{2})\cos(\theta+\tau),\ v = (1/\sqrt{2})\sin(\theta+\tau)\ \ (\tau = \pi/2,\ 3\pi/2)$ となる.

$$((1/\sqrt{2})\cos(\theta+3\pi/2), (1/\sqrt{2})\sin(\theta+3\pi/2), -(1/\sqrt{2})) = -((1/\sqrt{2})\cos(\theta+\pi/2), (1/\sqrt{2})\sin(\theta+\pi/2), 1/\sqrt{2}),$$
$$((1/\sqrt{2})\cos(\theta+3\pi/2), (1/\sqrt{2})\sin(\theta+3\pi/2), (1/\sqrt{2})) = -((1/\sqrt{2})\cos(\theta+\pi/2), (1/\sqrt{2})\sin(\theta+\pi/2), -(1/\sqrt{2}))$$

より直線 ℓ 上の点 $\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}\ (t \in \mathbb{R})$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{p} + t((1/\sqrt{2})\cos(\theta+\pi/2), (1/\sqrt{2})\sin(\theta+\pi/2), \pm(1/\sqrt{2})) \\ &= \boldsymbol{p} + (t/\sqrt{2})(\cos(\theta+\pi/2), \sin(\theta+\pi/2), \pm 1) \end{aligned}$$

となるから, $\boldsymbol{p}$ を通り X に含まれる直線 ℓ は $\boldsymbol{p} + t(-\sin\theta, \cos\theta, \pm 1)\ \ (t \in \mathbb{R})$ の 2 本となる.

(ii) $a=b=c=1$ のとき. $\ell : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}\ (\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} = (x_0, y_0, z_0) \in X,\ t \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{v} = (u,v,w) \in \mathbb{R}^3,\ \|\boldsymbol{v}\| = 1)$ を $\boldsymbol{p} \in X$ を通る X 内の直線とする.

$$(x_0)^2 + (y_0)^2 - (z_0)^2 = 1, \qquad (x_0+tu)^2 + (y_0+tv)^2 - (z_0+tw)^2 = 1 \quad (\forall\ t \in \mathbb{R})$$

より $x_0u + y_0v = z_0w,\ u^2+v^2 = w^2$ が成立. $u^2+v^2+w^2=1$ という仮定より $w = \pm 1/\sqrt{2}$, 特に $w \neq 0$ だから, $t_0 = -z_0/w$ と置けば $\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v} \in \ell \cap (X \cap \mathbb{R}^2)$ となる. よって ℓ は $\boldsymbol{p}_0$ を通り $\boldsymbol{v}$ を方向ベクトルとする直線, すなわち (i) の形の直線と一致する. ℓ が $(\cos\theta - t\sin\theta, \sin\theta + t\cos\theta, \pm t)\ \ (t \in \mathbb{R})$ により与えられるとき, $\boldsymbol{p} \in \ell$ より $t = \pm z$ となるから, ℓ は 2 本の直線

$$\left(\frac{x \pm yz}{1+z^2}, \frac{y \mp xz}{1+z^2}, 0 \right) + t\left(-\frac{y \mp xz}{1+z^2}, \frac{x \pm yz}{1+z^2}, \pm 1 \right) \qquad (t \in \mathbb{R},\ \text{複合同順})$$

の何れかになる.

(iii) a,b,c が一般のとき. $(x',y',z') = \varphi(x,y,z) = (x/a, y/b, z/c)$ とする. φ は線形同型射だから $\mathbb{R}^3$ の直線の像は再び直線となる. また $X' = \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 : (x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 1\}$ と置けば $\varphi(X) = X'$ となる. ℓ を $\boldsymbol{p} = (x,y,z) \in X$ を通る X 内の直線とすれば, $\varphi(\ell)$ は $\varphi(\boldsymbol{p}) = (x/a, y/b, z/c)$ を通る X' の直線となるから, (ii) より

$$\left(\frac{x/a \pm yz/bc}{1+(z/c)^2}, \frac{y/b \mp xz/ac}{1+(z/c)^2}, 0 \right) + t\left(-\frac{y/b \mp xz/ac}{1+(z/c)^2}, \frac{x/a \pm yz/bc}{1+(z/c)^2}, \pm 1 \right) \qquad (t \in \mathbb{R},\ \text{複合同順})$$

と表される. 従って $\boldsymbol{p}$ を通る X 内の直線 ℓ は

$$\left(\frac{c(bcx \pm ayz)}{b(c^2+z^2)}, \frac{c(acy \mp bxz)}{a(c^2+z^2)}, 0 \right) + t\left(-\frac{c(acy \mp bxz)}{b(c^2+z^2)}, \frac{c(bcx \pm ayz)}{a(c^2+z^2)}, \pm c \right) \qquad (t \in \mathbb{R},\ \text{複合同順})$$

の 2 直線となる．

（イ） $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，及び $\xi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$\psi(x,y,z) = \left(\frac{x}{a\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}}, \frac{y}{b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}}, z \right), \qquad \xi(u,v,w) = \left(au\sqrt{1+\frac{w^2}{c^2}}, bv\sqrt{1+\frac{w^2}{c^2}}, w \right)$$

により定義する．ψ，ξ はそれぞれ連続であり，$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$，$(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ について

$$\xi(\psi(x,y,z)) = \left(a\frac{x}{a\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}}\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}, b\frac{y}{b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}}\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}, z \right) = (x,y,z)$$

$$\psi(\xi(u,v,w)) \left(\frac{au\sqrt{1+\frac{w^2}{c^2}}}{a\sqrt{1+\frac{w^2}{c^2}}}, \frac{bv\sqrt{1+\frac{w^2}{c^2}}}{b\sqrt{1+\frac{w^2}{c^2}}}, w \right) = (u,v,w)$$

より ψ は全単射であり $\xi = \psi^{-1}$ となる．$(u,v,w) = \psi(x,y,z)$ $((x,y,z) \in X)$ に対し

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{x}{a\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}} \right)^2 + \left(\frac{y}{b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}} \right)^2 = \frac{1}{1+\frac{z^2}{c^2}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) = \frac{1}{1+\frac{z^2}{c^2}} \left(1 + \frac{z^2}{c^2} \right) = 1$$

及び $w = z$ より $\psi(X) \subset Y$ となる．逆に $(x,y,z) = \xi(u,v,w)$ $((u,v,w) \in Y)$ のとき

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = u^2\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right) + v^2\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right) - \frac{w^2}{c^2} = (u^2+v^2)\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right) - \frac{w^2}{c^2} = 1$$

より $\xi(Y) \subset X$ となる．従って ψ の X への制限は X から Y への同相写像であり，ξ の Y への制限がその逆写像となる． $\square$