【問題】　4 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 X, Y を次のように定める.

$$
\begin{aligned}
X =&\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x^2+xy+y^2=1\},\\
Y =&\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (x-z)^2+(y-w)^2=1\}
\end{aligned}
$$

(1)　X が可微分多様体となる事を証明せよ.
(2)　Y が可微分多様体となる事を証明せよ.
(3)　X と Y が微分同相である事を証明せよ.

(H21 千葉大理学研究科基盤理学専攻)

【解答】　(1) $f(x,y,z,w) = x^2+xy+y^2-1$ とすると $df = (2x+y)dx+(x+2y)dy$. $df = 0 \Leftrightarrow (x,y,z,w) = (0,0,z,w)$ (z, w は任意) となるが, $(0,0,z,w) \notin X$ だから X 上で $df \neq 0$. 従って X は $\mathbb{R}^4$ の $4-1=3$ 次元正規部分多様体としての可微分多様体である.
(2)　$g(x,y,z,w) = (x-z)^2+(y-w)^2-1$ とすると $dg = 2(x-z)dx+2(y-w)dy-2(x-z)dz-2(y-w)dw$. $dg = 0 \Leftrightarrow (x,y,z,w) = (s,t,s,t)$　(s, t は任意) となるが, $(s,t,s,t) \notin Y$ だから Y 上で $dg \neq 0$. 従って Y は $\mathbb{R}^4$ の $4-1=3$ 次元正規部分多様体としての可微分多様体である.
(3)　$(x,y,z,w) = (x^1+x^2, x^1-x^2, x^3, x^4)$ とすると, この変換に関する Jacobi 行列は

$$
\frac{\partial(x,y,z,w)}{\partial(x^1,x^2,x^3,x^4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

だから, (x^1,x^2,x^3,x^4) は $\mathbb{R}^4$ 上の C^∞ 級座標系となる. この座標系を用いれば

$$
X = \{(x^1,x^2,x^3,x^4) \in \mathbb{R}^4 : 3(x^1)^2+(x^2)^2=1\}
$$

と表される. 一方, $(x,y,z,w) = (y^1-y^3, y^2-y^4, y^3, y^4)$ とすると, この変換に関する Jacobi 行列は

$$
\frac{\partial(x,y,z,w)}{\partial(y^1,y^2,y^3,y^4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

だから, (y^1,y^2,y^3,y^4) は $\mathbb{R}^4$ 上の C^∞ 級座標系となる. この座標系を用いれば

$$
Y = \{(y^1,y^2,y^3,y^4) \in \mathbb{R}^4 : (y^1)^2+(y^2)^2=1\}
$$

と表される.

$$
\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad (y^1,y^2,y^3,y^4) = \phi(x^1,x^2,x^3,x^4) = (\tfrac{x^1}{\sqrt{3}}, x^2, x^3, x^4)
$$

とすれば ϕ は明らかに $\mathbb{R}^4$ の自身への C^∞ 級微分同型射であり, $\phi(X) = Y$, $\phi^{-1}(Y) = X$ となる. X, Y は共に $\mathbb{R}^4$ の正規部分多様体だから, ϕ, ϕ^{-1} の X, Y への制限はそれぞれ X から Y, Y から X への C^∞ 級写像であり, よって X, Y は微分同型である. $\square$

【問題】 n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ 内の滑らかに埋め込まれた，原点 O を通過しない閉曲線 C 上の点 P が極点であるとは，直線 OP と C の点 P に於ける接線とが直交することとして定義する．このとき C 上には少なくとも 2 つの極点が存在する事を示せ．ここで $\mathbb{R}^n$ 内の滑らかに埋め込まれた閉曲線とは，$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^n$ への C^∞ 級写像 $c = (c_1(t), \cdots, c_n(t))$ で，2 条件

(1) $c'(t) = (c_1'(t), \cdots, c_n'(t)) \neq (0, \cdots, 0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$,

(2) $c(t+1) = c(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

を満たすものとして定める．

(H18 千葉大理学研究科基盤理学専攻)

【解答】 O を始点，$c(t)$ を終点とするベクトルを再び $c(t)$ と記す．$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を内積とし，$f(t) = \langle c(t), c(t) \rangle$ と置けば $f'(t) = 2\langle c(t), c'(t) \rangle$ となる．特に $f(t)$ は C^∞ 関数だから閉区間 $[0,1]$ 上で最大値 $f(t_1)$，最小値 $f(t_2)$ $(t_1, t_2 \in [0,1])$ を持ち，$f'(t_i) = 0$，従って $\langle c(t_i), c'(t_i) \rangle = 0$ となる．故に $c(t_1)$，$c(t_2)$ は極点となる． □