

【問題】 以下の設問に答えよ。ただし、 $n$  に自然数とする。

(1) 与えられた数列  $\{a_n\}$  が

$$a_n > a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

をみたすとする。  $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$  と置くと、極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  が存在する事を証明せよ。

(2) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x+1} dx$$

が存在する事を証明せよ。

(H20 東工大情報工学研究科 数理・計算科学専攻)

【解答】 (1)  $n = 1, 2, \dots$  について単調減少である事、および  $a_n \geq 0$  である事より

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n-1} &= -a_{2n+1} + a_{2n} > 0, \\ S_{2n+2} - S_{2n} &= a_{2n+2} - a_{2n+1} < 0, \\ S_{2n+2} - S_{2n+1} &= a_{2n+2} > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore S_1 < \dots < S_{2n-1} < S_{2n+1} < S_{2n+2} < S_{2n} < \dots < S_2$$

数列  $\{S_{2n-1}\}_{n=1,2,\dots}$  は上に有界な単調増加数列だから収束する。この極限を  $S$  とする。一方、数列  $\{S_{2n}\}_{n=1,2,\dots}$  は下に有界な単調減少数列だから収束する。この極限を  $T$  とする。このとき

$$\begin{aligned} |T - S| &\leq |T - S_{2n}| + |S_{2n} - S_{2n-1}| + |S_{2n-1} - S| \\ &= |T - S_{2n}| + a_{2n} + |S_{2n-1} - S| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

より  $S = T$  となる事が分かる。従って数列  $\{S_n\}_{n=1,2,\dots}$  は  $S (= T)$  に収束する。

(2)  $n = 1, 2, \dots$  に対し  $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x+1} dx$   $\left( \Leftrightarrow (-1)^k a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x+1} dx \right)$  とする。このとき  $t = x - \pi$  という置換により

$$a_{n+1} = \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin x|}{x+1} dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t+\pi)|}{t+\pi+1} dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t+\pi+1} dt.$$

$n\pi < t < (n+1)\pi$  となる任意の  $t$  に対して  $|\sin t|/(t+1) > |\sin t|/(t+\pi+1)$  だから  $a_n > a_{n+1}$  となる。また

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x+1} dx \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{x+1} dx \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{n\pi+1} dx = \frac{\pi}{n\pi+1}$$

より  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  となる。以上より (1) の 2 条件が成立し、 $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$  は収束する事が分かる。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x+1} dx &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+1} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x+1} dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+1} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a_k = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+1} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} \end{aligned}$$

だから  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x+1} dx$  は存在する事が分かる。 □